Lecture au sujet de l'ALGEBRE :

I. Après les Babyloniens, les Egyptiens, Chinois, Grecs et Indiens ... voici ... Diophante [au 3è siècle de l'ère chrétienne] qui introduisit le concept d'inconnue et considéré comme "le père" de l'algèbre : Son ouvrage essentiel, l'*Arithmétique*, influença et les mathématiciens arabes et ceux de la Renaissance.

II. AL-KHWARIZMI Muhammad, perse, vers 780-850 (de qui vient le mot :algorithme)

Al-Khwarizmi Muhammad ibn Moussa est né à *Khwarizem* (Ouzbékistan), d'où son nom. Il fut un astronome reconnu sous le règne du Calife Abd Allah al Mahmoun (786-833) qui encouragea la philosophie et les sciences en ordonnant la traduction (vers 827) des textes de la Grèce antique. C'est ainsi, par exemple, que fut connue l'oeuvre de Ptolémée, dite *Al majisti* (la très grande) : *l'Almageste*.

La notoriété d'Al-Khwarizmi nous est parvenue moins par ses talents d'astronome que par son intervention dans l'art du calcul *algébrique* : auteur du célèbre ouvrage *Kitab Al jabr w'al mouqabala*, translittération latine du titre arabe, *Livre sur la science de la transposition et de la réduction*. Ce traité, écrit à la demande du Calife Al Mamoun de Bagdad (813-833), place Al-Khwarizmi comme un des premiers *algébristes*, mais ces travaux auraient été inspirés de ceux de l'indien Brahmagupta.

En trigonométrie, il est coutume d'attribuer à Al-Khwarizmi, dans un traité écrit à Bagdad, la volonté d'asseoir l'utilisation systématique de la *demi-corde*, équivalente au sinus dans un cercle de rayon 1, en remplacement des cordes de Ptolémée. Selon P. Youschkevitch, son ouvrage ne fut connu que vers l'an 1000 et sans doute complété par Abu Al Qasim Maslama, autre astronome installé à Cordoue.

« *Algèbre* » (14è siècle) vient de l'arabe *al jabr* utilisé par Al-Khwarizmi pour signifier *la transposition* qui se traduit essentiellement par l'ajout d'une même quantité dans les deux membres de l'équation afin d'éliminer des termes par soustraction. *La mouqabala* consiste à diviser éventuellement afin d'avoir la solution (3x=1) ou une équation normalisée [coefficient en x^2 : 1] pour le second degré.

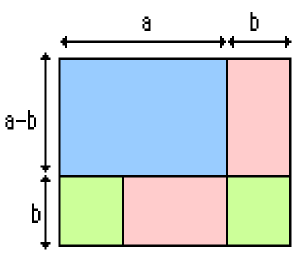
Les termes arabes désignant *l'équation (muadala)*, *l'inconnue* (*gezr = racine, ou cheï = chose*) et le *carré de l'inconnue (mahal)* apparaissent ... Al-Khwarizmi fait allusion aux nombres négatifs des mathématiciens Indiens mais ne les accepte pas comme solutions. Aussi, outre les méthodes *géométriques* déjà utilisées par Euclide, il énonce donc *des règles algébriques* pour équations de degré 2 (seulement) mais sans racines négatives vues comme impossibles … Elles ne seront prises en compte en Occident qu'après Girard (qui a donné l'aire d'un triangle sphérique) et Descartes.

Le terme racine est utilisé pour signifier "quelque chose de caché" qu'il s'agit de déterminer. Le même terme est utilisé pour désigner les nombres solutions d'équations comme $x^2 = a$, $x^3 = a$ …

Algorithme :

La démarche méthodique et la puissance de ses calculs, par l'usage des chiffres *arabes*, valut donc à Al-Khwarizmi de voir son nom utilisé dès le 12è siècle en Occident : *algorismo* en espagnol, *algorisme* (algorithme en français de nos jours), mot formé sur son nom et le mot grec *arithmos* (*nombre)* et qui a donné également : *arithmétique*.

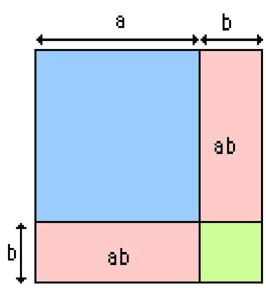
Afin de valider ses *algorithmes,* il utilisa aussi, comme Euclide auparavant, le support géométrique des aires:

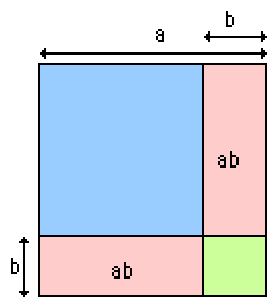


$a^2 - b^2 = (a + b) . (a - b)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$





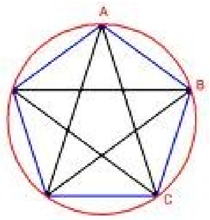
… Mais toutefois on doit noter qu'avec Al-Khwarizmi et Abu Kamil, on s'affranchit peu à peu du support géométrique ...

III. LES EQUATIONS ALGEBRIQUES de degré 2, 3, 4

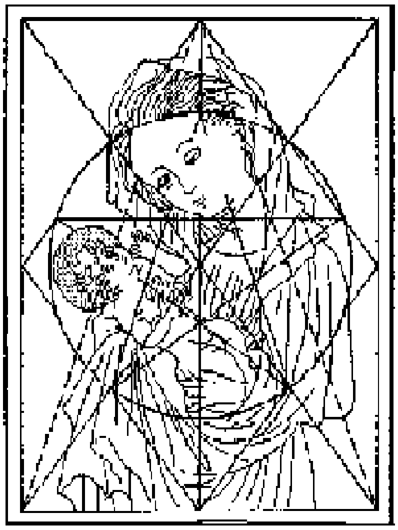
A. Les équations de degré 2 : a.x^2 +b.x+c = 0.

Elles sont bien connues ... **mais ajoutons un mot avec l'exemple du célèbre Nombre d'Or :**

1. Pour obtenir son carré, ajouter 1 : donc : x^2 = x + 1 Phi = 1,618...
2. Pour avoir l'inverse, enlever 1 : donc : 1/x = x - 1 1/ Phi = 1, 618...−1 = 0, 618...
3. Le pentagone régulier Si H = (A,C) ∩ (B,E) Euclide montre que AC/AB =AB/AH = Phi en ayant AB = BC = HC: Le côté du pentagone étoilé divisé par le côté du pentagone régulier vaut Phi. Ou encore : les 5 branches de l'étoile se coupent 2 à 2 (ou bien H divise AC) selon le Nombre d'Or.



- La célèbre suite de Fibonacci : 0,1,1,2,3,5,8,13,21... (un+2 = un + un+1, u0=0, u1=1) est telle que un+1 / un tend vers Phi (d'ailleurs en oscillant autour de cette limite) ...
- C'est au milieu du XVIème siècle, à Venise, qu'est publié: « De la divine proportion » exposant toutes les propriétés connues alors de cette fameuse et antique "proportion en extrême et moyenne raison". Son auteur est un moine savant de Bologne : Fra Luca Pacioli di Borgo … Et quant à l'illustrateur de l'ouvrage, c'est Léonard de Vinci lui-même qui surnommait cette proportion: "section dorée", d'où l'appellation usuelle [actuelle] de : "Nombre d'Or"...
- Exemple tiré d'un Que sais-je: Gravure d'une Vierge à l'Enfant d'un maitre du nord de la France vers 1425



B. Les équations de degré 3 :

Au début du XVI siècle, c'est à Bologne que se trouve le centre le plus actif de recherches ... notamment sur la résolution des équations de degré 2, sur lesquelles s'étaient penchés Diophante, Al-Khayyâm et Al-Din-al-Tusi : en vain ... Le premier à ouvrir une brèche est Scipione del Ferro qui parvient à des solutions dans quelques cas. Il communique ses travaux à son gendre Annibal de la Nave, qui ne put s'empêcher d'en parler à un ami : Anton Maria del Fiore. A la mort de del Ferro, del Fiore se mit à lancer des défis aux mathématiciens du monde entier (ce qui ne dépassera guère le Nord de l'Italie !) C'est Tartaglia qui va relever le défi ; et plagié par Cardan ! …
(A bien noter: une première apparition de racines carrées de nombres négatifs : Bombelli …)

C. Les équations de degré 4 : **Ferrari élève de Cardan... On se ramène en théorie au degré 3.**

IV. L'ALGEBRE depuis le XVIIe siècle : (*) « Le tournant du 5ème degré... »

On s'intéresse à la possibilité d'exprimer les racines par formules générales à l'aide de radicaux.

Les échecs pour le degré 5 amènent le mathématicien Abel (après Vandermonde, Lagrange, et Gauss) à approfondir les transformations sur les racines d'une équation. Abel démontre l'impossibilité, dans le cas général, de résoudre *par radicaux* une équation algébrique (ou polynomiale) de degré 5.

Évariste Galois (1811 - 1832), dans un mémoire fulgurant, introduit pour la première fois la notion de groupe (en étudiant les permutations des racines d'une telle équation) et compléte les travaux d' Abel.

Même l'équation X^5-X+1=0 (par exemple) est non résoluble par radicaux ! ...

Cette recherche remontait au plus profond des temps et le très célèbre Diophante s'y intéressa. Avant lui citons "le théorème de Pythagore" dont on retrouve des traces dans des tables babyloniennes vers 2000 ans avant Jésus-Christ…Mais c'est au 19è, suite à Lagrange, Abel, Ruffini, Galois, que groupes, anneaux et corps sont nés… Et le sujet n'était pas clos : π ne semblait pas « algébrique »; ni e : on dit « transcendant» (Liouville) ; preuve par (Lindemann) et (Hermite inspirant Lindemann, après lui).

Sur les groupes: Il y a les abéliens et les non abéliens ! les finis et les infinis... 3 exercices :

(1) Il y a seulement deux groupes d'ordre 4, le groupe cyclique U4 et le groupe de Klein

- **le groupe cyclique commutatif ({1,i,-1,-i} par exemple)**
- **et le groupe commutatif non cyclique (dit *groupe de Klein*) *des isométries du plan laissant invariant un rectangle* [ou le groupe multiplicatif (produit matriciel) dont les éléments sont :**

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I\ ,\ \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = J\ ,\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = K\ ,\ \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = L$$

x	I	J	K	L
I	I	J	K	L
J	J	I	L	K
K	K	L	I	J
L	L	K	J	I

et dont la table est le « carré latin » ci-contre à droite.]

(2) Le plus petit groupe non abélien possède 6 éléments et il est représenté par *le groupe S_3*

(3) Intérêt (élémentaire) des groupes ? Exemple. Montrer (aisément) le Théorème de Wilson :

p>= 2 premier si et seulement si p divise 1+(p-1)! [peu utile car (p-1)! gigantesque]

Notes : Carrés latins et carrés magiques : (On parle aussi de « matrice magique »)

Un carré latin est tel que chaque terme apparaît une et une seule fois par ligne et colonne. Ainsi la table d'un groupe (ci-dessus) est un « carré latin ». Mais il y a des carrés latins qui ne sont pas des tables de groupe (ci-dessous en (2), (3) sinon abéliens); toutefois ce sont des « carrés magiques » :

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & C & B & D\\ D & B & C & A\\ C & A & D & B\\ B & D & A & C\end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

Les *carrés magiques* remontent aux temps anciens et présents dans toutes les grandes civilisations. Son origine semble provenir de l'Inde et de la Chine , 2000 ans avant J.-C... On le retrouve dans les mathématiques Arabes... Fermat et Euler les ont étudiés... Le peintre et graveur Albrecht Dürer s'y est intéressé : on retrouve un carré magique [le (1) ci-dessus] dans une de ses gravures : *Melancolia*.

Les lignes, colonnes, diagonales ont toujours même somme. Autre exemple toujours sans répétition :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(Note : 880 carrés magiques 4x4 publiés en 1693 par le mathématicien Bernard Frénicle de Bessy) !

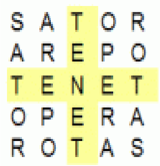
Un aparté : **A propos de carré magique voici un mot sur le célèbre carré de lettres « SATOR ».**
Qu'est ce donc ? Un carré palindrome (= qui se lit dans les deux sens) retrouvé si souvent; ainsi :

- dans les ruines de Pompeï enseveli par l'éruption du Vésuve en 79 ap. J.C, donc antéreur!
- dans celles de Rennes-le-château, le château de Jarnac (Charentes), Loches, Chinon ...
- en l'église Saint-Laurent à Rochemaure (Ardèche) ; au Puy-en-Velay [Saint Michel, ci-dessous]
- au Pays de Galles, en Espagne, Italie, Turquie, Ethiopie, Egypte, Syrie …

Le voici : SATOR AREPO TENET OPERA ROTAS soit, mot à mot :

Le laboureur à sa charrue (ou en son champ) dirige les travaux ?

Cette importance suscitait un grand étonnement... C'est alors qu'en 1925 un pasteur protestant [Allemand] **Felix Grosser**, y découvrit la composition surprenante: « PATER NOSTER » ... il relia pour finir les 2 lettres A et O restant au bien connu ... « Je suis l'Alpha et l'Omega » de l'Apocalypse :



Alors, pour cet incroyable carré « SATOR », diverses interprétations surgirent … par exemple :

- Le semeur (Christ ?) à sa charrue (Croix ?) retient par son œuvre (Sacrifice ?) les roues (Destin?)

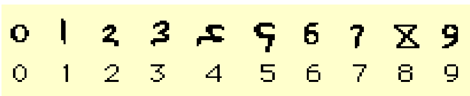
- Dieu (Sator ?) dirige (tenet ?) la création (rotas ?) le travail de l'homme et le produit de la terre...

V. L'Algèbre linéaire : [essentielle] Descartes, Gauss, Jordan, Cayley, Hamilton, Grassmann …

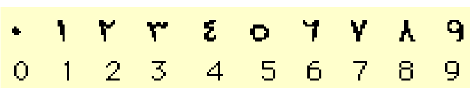
Qui concerne les systèmes linéaires, les matrices, déterminants, espaces vectoriels ... Puis on ajoute les produits scalaires (partie essentielle des études élémentaires : un e.v. réel, de dimension finie, muni d'un produit scalaire est dit « euclidien »); puis (en poursuivant) les espaces « hermitiens » (avec C) les espaces « de Hilbert » ... en essayant de généraliser le cas (agréable) des de dimensions finies!…

VI. Retour (et fin) avec les chiffres « *arabes* » :

Les chiffres de notre système décimal dits "arabes" ne furent introduits en Europe que vers l'an 1000. En réalité, ils proviendraient de l'Inde et furent transmis, après de nombreuses retouches, par les Arabes à l'Occident grâce spécialement à Gerbert d'Aurillac. Au moyen âge, les mathématiciens arabes occidentaux [citons Fès capitale culturelle et spirituelle du Maroc, où se trouve Quaraouiyine, l'établissement éducatif existant le plus âgé dans le monde; et Cordoue en Espagne] utilisaient :



Alors que les chiffres arabes orientaux (Bagdad, Égypte et actuels) sont différents :



Le mot français : « *chiffre* » est une déformation du mot arabe (prononcer approximativement *sifrone* désignant *zéro*. En italien, zéro se dit *zero*, et serait une contraction de *zefiro*. Ainsi nos termes chiffres et zéro ont la même origine ... Notons que le zéro n'eut pas chez les Arabes et au Moyen Age (semble-t-il) le statut de véritable nombre, ce qui freina notablement l'introduction des nombres relatifs. (...)