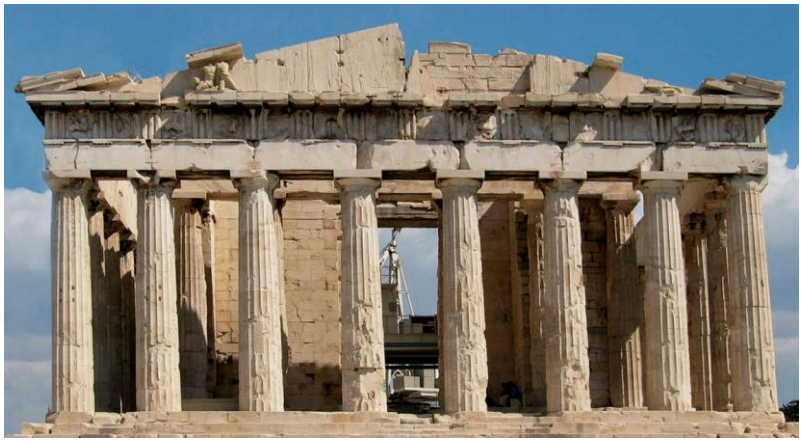
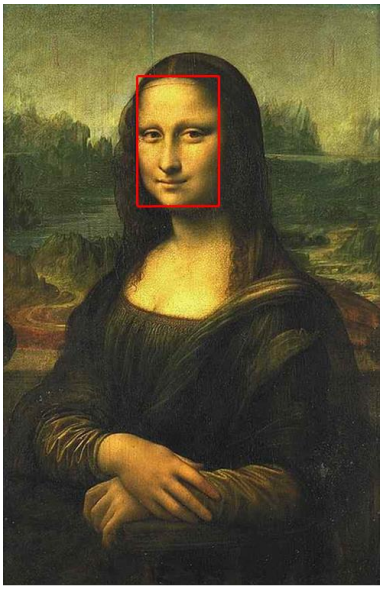
Histoire des arts – Le mystère du nombre d'or

I) **<u>Observations</u> :** Pour chacune des œuvres, calculer le rapport $\frac{longueur}{largeur}$.

	**<u>Le Parthénon</u>** Lieu : Athènes Architecte : Phidias Construction : de -449 à -438 Pour la façade est : • longueur $\approx 30{,}87\ m$ • largeur $\approx 19\ m$ $\frac{longueur}{largeur} \approx$ .....
	**<u>La Joconde</u> (ou portrait de Mona Lisa)** Peintre : Léonard de Vinci Date : entre 1503 et 1506 Technique : huile sur toile Exposée au musée du Louvre (Paris) Le visage est inscrit dans un rectangle : • longueur $\approx 18{,}3\ cm$ • largeur $\approx 11{,}4\ cm$ $\frac{longueur}{largeur} \approx$ .....
	<u>La dernière Cène</u> Peintre : Salvatore Dali Date : 1955 Technique : huile sur toile C'est une interprétation moderne de la célèbre Cène de Léonard de Vinci. Dimension : • longueur $= 270\ cm$ • largeur $= 168{,}3\ cm$ $\frac{longueur}{largeur} \approx$ .....

On remarque que

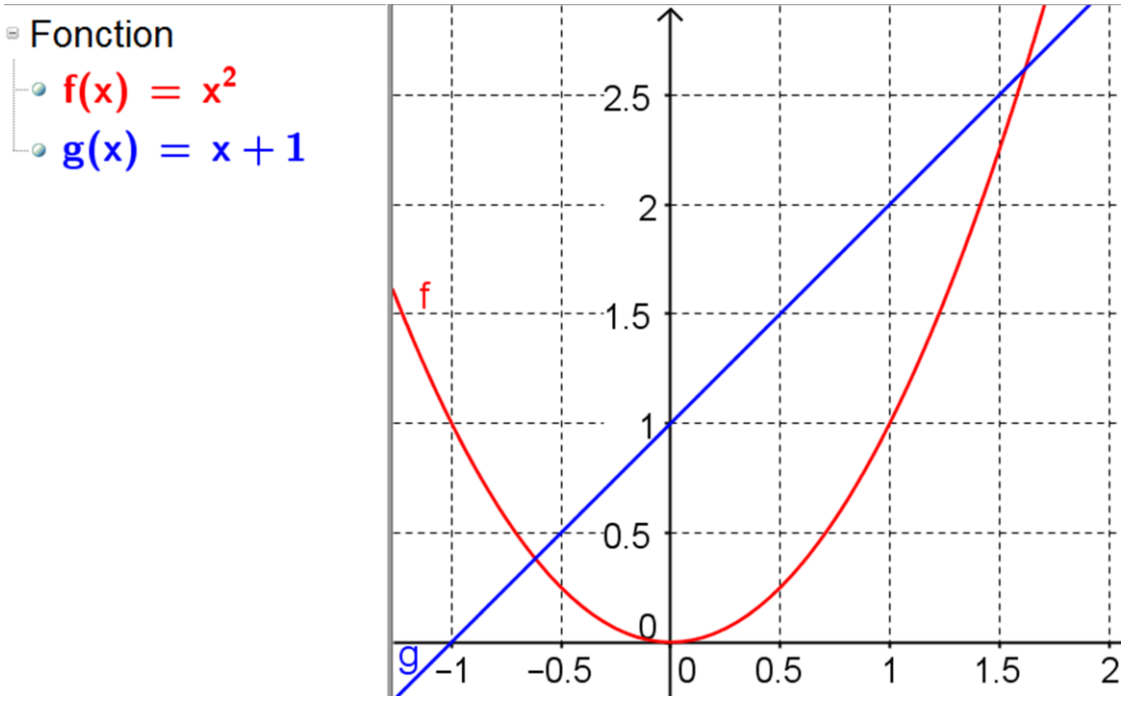
II) Définitions et propriétés remarquables :

1) Définition :

Le nombre d'or se note Φ. C'est une référence à Phidias architecte du Parthénon (temple grec). Par définition c'est la solution positive de l'équation $\boldsymbol{x^2 = x + 1}$.

2) Lecture graphique du nombre d'or :

On définit les fonctions $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ par $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ et $\boldsymbol{g(x) = x + 1}$.



On lit les 2 solutions de $f(x) = g(x)$: …… et …… . Ainsi $\boxed{\Phi \approx \ldots\ldots\ldots}$

3) Valeur exacte du nombre d'or : Vérifier que la valeur exacte de Φ est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

- $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 =$ ……
- $\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 =$ ……

Finalement, $\boxed{\Phi = \ldots\ldots\ldots\ldots \approx \ldots\ldots\ldots\ldots}$

4) Propriétés du nombre d'or :

$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$	$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$	$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$

III) Le rectangle d'or :

1) Définition :

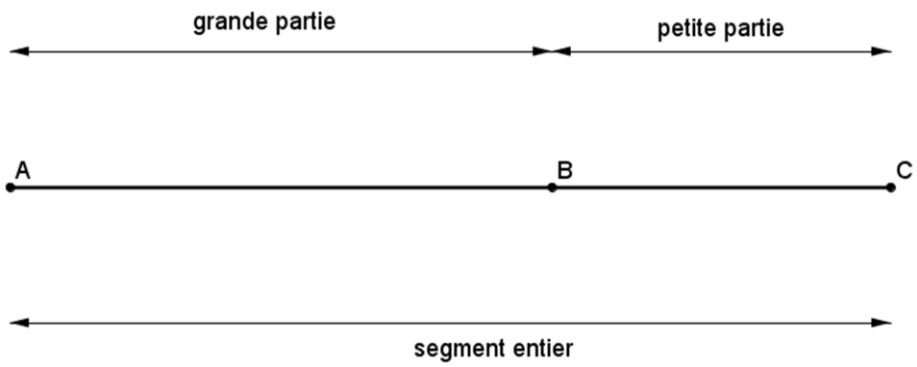
Un rectangle d'or est un rectangle dont le rapport de la longueur sur la largeur vaut Φ.

Exemple : compléter les dimensions pour avoir des rectangles d'or

$DC =$ …… et $EH =$……

2) La proportion parfaite :

Luca Pacioli consacre un traité sur le nombre d'or (en 1509) en lui donnant le nom de « divine proportion ». Il explique comment couper harmonieusement un segment en deux parties (une petite et une grande) : **« le tout est à la partie ce que la partie est au reste »**



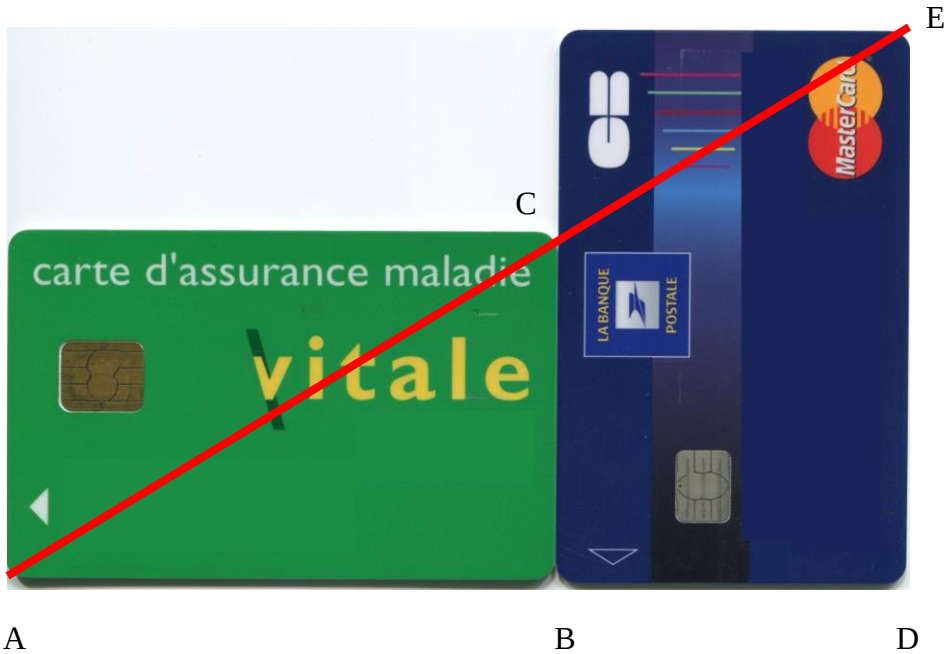
On peut traduire par : le rapport du tout sur la grande partie doit être égal au rapport de la grande partie sur la petite partie.

Pour les calculs, prenons une petite partie qui mesure 1 et une grande partie qui mesure x. Le segment entier mesure donc $x + 1$.

Trouver quel doit être le rapport $\frac{grande\ partie}{petite\ partie}$ pour avoir une proportion parfaite :

3) Reconnaitre un rectangle d'or :

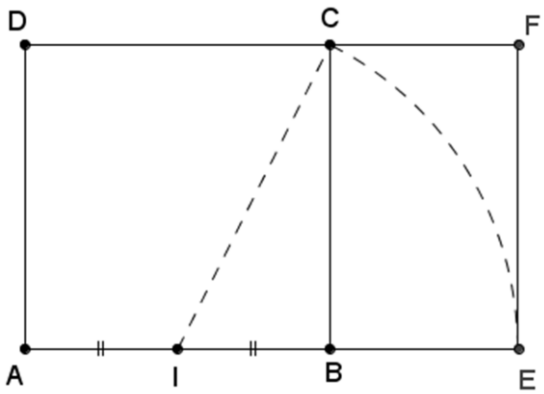
Pour reconnaître un rectangle d'or, on peut utiliser une carte format « carte de crédit » : en disposant la première à l'horizontale, la seconde à la verticale et en alignant leurs bases, on obtient :



Sans connaître les dimensions exactes, prouver que pour ce format, le rapport $\frac{longueur}{largeur}$ est égale à Φ :

Cette caractéristique est propre aux rectangles d'or de même taille. On peut ainsi facilement tester si un rectangle est un rectangle d'or.

4) Construire un rectangle d'or :



ABCD est un carré.

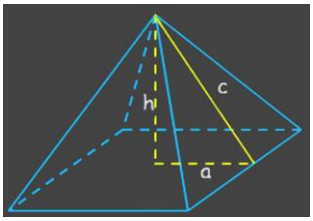
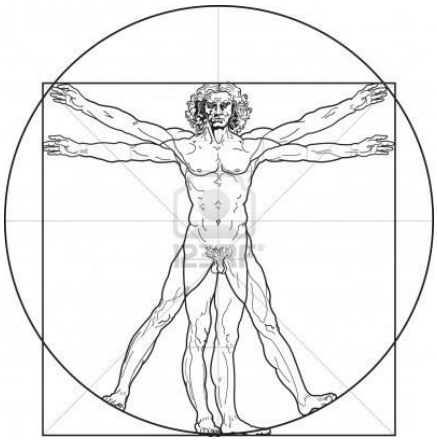
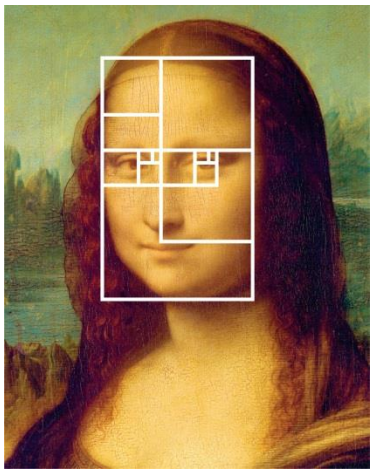
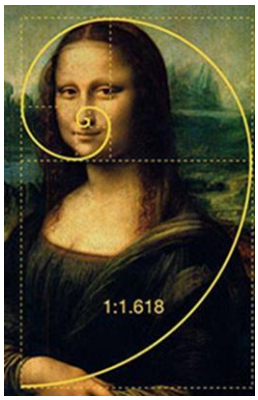
M est le milieu de [AB].

On reporte la longueur MC sur (AB) et on place ainsi le point E.

On place F tel que AEFD soit un rectangle.

Pour $AB = 4\ cm$, montrer que AEFD est un rectangle d'or :

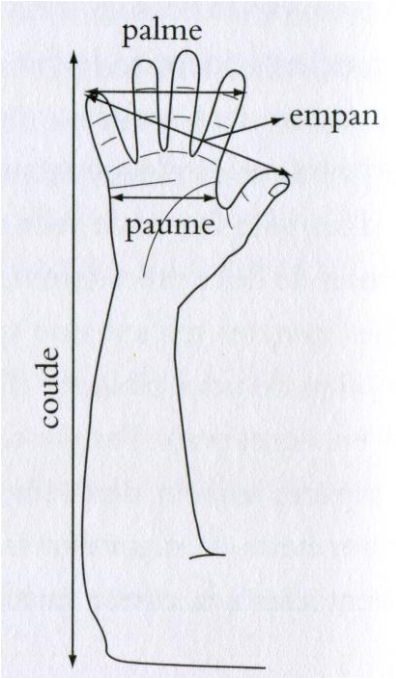
5) Des rectangles d'or dans de nombreuses œuvres d'art :

	La pyramides de Khéops (Egypte)  Le rapport de l'apothème (c) sur la demi base (a) est très près de Φ.
	Dans **l'homme de Vitruve** ou l'homme parfait (1492), Léonard de Vinci nous montre les proportions géométriques idéales du corps humain, inséré dans un carré et un cercle. Le quotient entre la mesure du côté du carré et celle du rayon du cercle est le nombre d'or.
	Dans **la Joconde** (1503 – 1506) de Léonard de Vinci, plusieurs rectangles d'or structurent le visage et le personnage est inscrit dans une spirale d'or. 
	La toile **Une baignade à Asnières** (1884) de Georges Seurat est un rectangle d'or (201 cm × 300 cm). Certains éléments sont eux-mêmes insérés dans des rectangles d'or :

6) <u>Proportion divine ou imposture</u> ?

Peut-être cette proportion a-t-elle été souvent utilisée dès l'antiquité (**<u>pyramide de Khéops</u>** et **<u>Parthénon</u>**), du fait que le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a des propriétés incroyables dans des domaines très variés :

- En calculant le rapport $\frac{taille\ totale}{hauteur\ du\ nombril}$ sur une grande population, ou trouve en moyenne une valeur très proche de Φ.

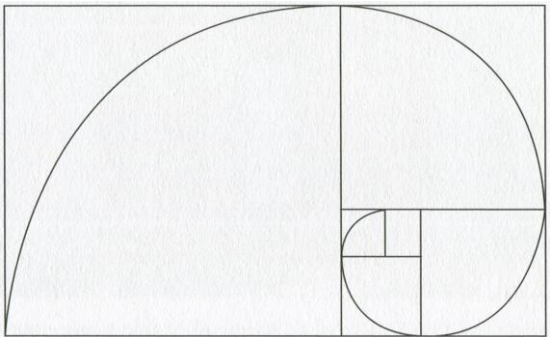


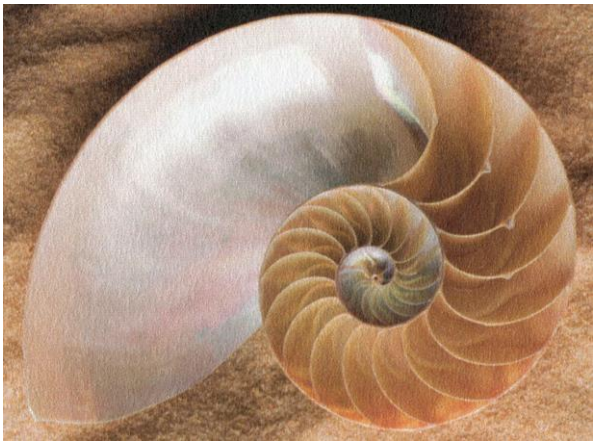
- La proportion d'or intervient dans différentes parties du corps humain. D'ailleurs, au Moyen Age les mensurations humaines étaient utilisées comme patron. Voici la correspondance qui avait été retenue :

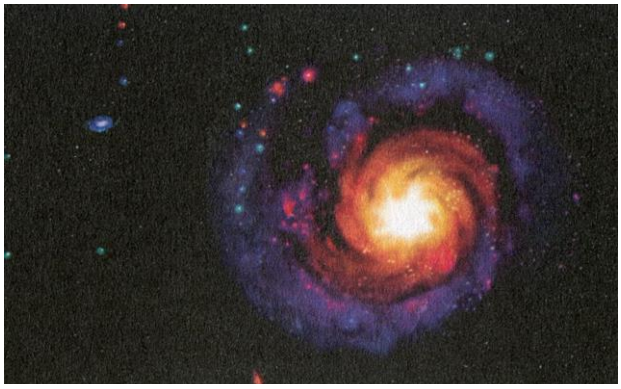
Paume	Palme	Empan	Pied	Coude
7,64 cm	12,63 cm	20 cm	32,26 cm	52,36 cm

$\times\ \Phi$ $\times\ \Phi$ $\times\ \Phi$ $\times\ \Phi$

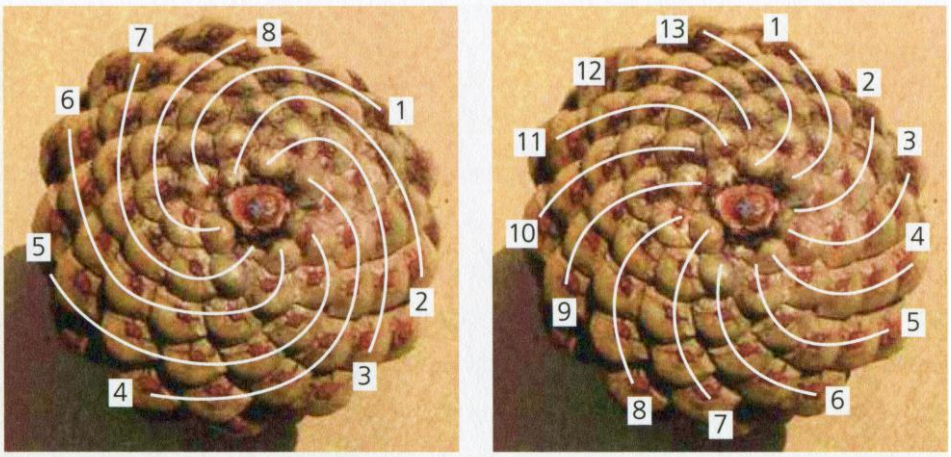
- La spirale d'or (obtenue en traçant des quarts de cercle dans une succession de rectangles d'or) peut s'observer dans notre environnement (coquille d'escargot, forme des bras d'une galaxie)



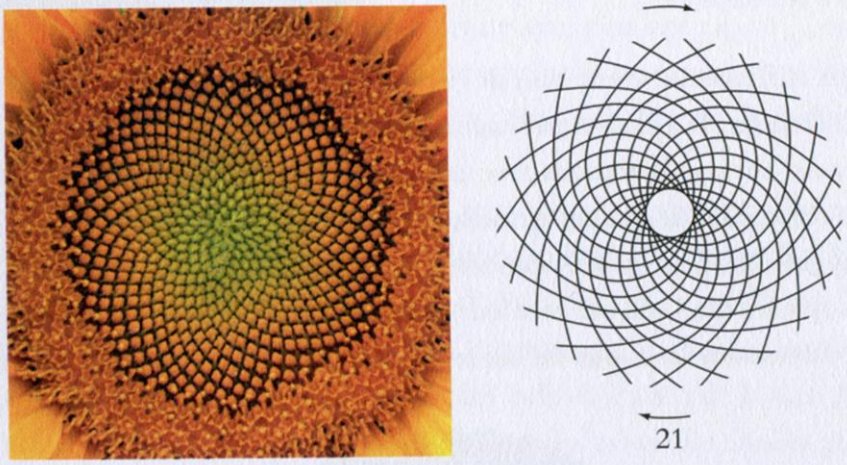




- Dans la nature, on voit apparaître les termes de la suite de Fibonacci (1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; ; ; ; ; ; etc) qui sont intimement liés au nombre d'or. On peut calculer directement un terme de cette suite sans connaître les deux termes d'avant, avec la formule $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times [\Phi^n - (1 - \Phi)^n]$.



Les nombres de spirales de cette pomme de pin dans les deux sens de rotation, 8 et 13, sont des termes consécutifs de la suite de Fibonacci.



Cette fleur de tournesol présente une paire de 21 spirales dans un sens et 34 dans l'autre.

Le nombre de pétales de la marguerite est toujours un nombre de Fibonacci ; ici, 21.

On croit aussi voir le nombre d'or partout car ses propriétés mathématiques le font apparaître dans de nombreuses figures géométriques : par exemple il rentre dans la construction du pentagone régulier et donc dans celle de l'étoile pentagonale.

L'étoile pentagonale se distingue clairement dans la composition de La Sainte Famille *de Michel-Ange.*

Le mystère réside dans le fait qu'on ne sait pas si en créant l'œuvre, l'artiste fait volontairement apparaître le nombre d'or car il voit en lui des proportions parfaites ou parce qu'il s'inspire d'autres artistes utilisant le nombre d'or ou bien si en voulant absolument voir du nombre d'or, on essaie de fragmenter l'œuvre de façon à le faire apparaître artificiellement. La question reste posée, par exemple dans La Naissance de Vénus (1485) de Sandro Botticelli : la toile est un rectangle d'or (278,5 × 172,5 cm), le carré associé au rectangle d'or correspond à un rythme du tableau et la diagonale du rectangle restant ainsi que sa symétrique sont des lignes de force du tableau et le corps de la déesse montre des proportions d'or… Le nombre d'or apporte (volontairement ou pas) une certaine harmonie.