Juillet 2003

Les nombres de Bernoulli
(par A. Joyal pour le camp mathématique)

Les nombres de Bernoulli sont parmi les objets le plus fascinants des mathématiques. On les retrouve en arithmétique, en théorie des nombres, en analyse et même en topologie.

§ **0 Un peu d'histoire**

On raconte que Gauss écolier découvrit la formule

$$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Un seul exemple suffit pour l'expliquer: on a

$$\begin{aligned} 2S(12) = S(12) + S(12) &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 \\ &+ 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ &= 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 \\ &= 12 \times 13 \end{aligned}$$

La formule de Gauss était bien sûr connue des Pythagoriciens qui savaient calculer aussi la somme des nombres impairs successifs:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

La somme des carrés successifs

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

était aussi connue dans antiquité. Au 11^e siècle, un mathématicien musulman, Al-Karagi, découvrit l'identité remarquable

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Au 17^e siècle, Pascal, Fermat et Wallis obtinrent la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 x^k\, dx = \frac{1}{k+1}$$

pour un exposant entier k, en calculant la somme

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k.$$

Par exemple, pour montrer que l'on a

$$\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}$$

il suffit de savoir que

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$

Il est facile de vérifier la justesse de cette formule par récurrence mais il est plus difficile de la trouver. Il semble que Johann Faulhaber (1580-1635) fut le premier à montrer que $S_k(n)$ est un polynôme de degré $k+1$ dans la variable n. Dans son *Academia Algebrae*, publié en 1631, il donne les coefficients de ce polynôme pour toutes les valeurs de $k \leq 23$. Ces formules furent popularisées plus tard par Jacques Bernoulli (1654-1705) qui en obtint le crédit. Avant de présenter la formule générale, nous allons discuter d'une méthode attribuée à Pascal pour calculer le polynôme $S_k(n)$ à partir des polynômes $S_r(n)$ pour $r < n$. Observons que le terme de rang n d'une suite arbitraire $a_0, a_1, a_2, a_3 \cdots$ est égal au premier a_0 augmenté des accroisements intermédiaires:

$$a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}).$$

Aujourd'hui, on dit que cette somme de *télescopique*. Par exemple, la différence entre deux carrés successifs est le nombre impair $2n - 1 = n - (n-1)^2$. Par suite,

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1).$$

Pour la somme des carrés, calculons la différence entre deux cubes successifs: $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$. Par suite,

$$n^3 = \sum_{i=1}^{n} (3i^2 - 3i + 1).$$

Mais on a

$$\sum_{i=1}^{n} (3i^2 - 3i + 1) = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Par suite

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = n^3 + 3\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}.$$

Plus généralement, Pascal observe que la différence $n^{p+1} - (n-1)^{p+1}$ est un polynôme de degré inférieur à p. En effet, par la formule du binôme on a

$$n^{p+1} - (n-1)^{p+1} = \binom{p+1}{1} n^p - \binom{p+1}{2} n^{p-1} + \binom{p+1}{3} n^{p-2} - \cdots.$$

Par somme télescopique on obtient

$$n^{p+1} = \binom{p+1}{1} \sum_{i=1}^{n} i^p - \binom{p+1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^{p-1} + \cdots.$$

On en tire que

$$(p+1)S_p(n) = n^{p+1} + \binom{p+1}{2} S_{p-1}(n) - \binom{p+1}{3} S_{p-2}(n) + \binom{p+1}{4} S_{p-3}(n) + \cdots.$$

Par exemple, si $p = 5$ la méthode de Pascal donne

$$6 \cdot S_5(n) = n^6 + 15S_4(n) - 20S_3(n) + 15S_2(n) - 6S_1(n) + S_0(n).$$

Supposons que l'on connaisse déjà les formules

$$\begin{aligned}
1S_0(n) &= n, \\
2S_1(n) &= n^2 + n, \\
3S_2(n) &= n^3 + \frac{3}{2}\,n^2 + \frac{1}{2}\,n, \\
4S_3(n) &= n^4 + 2\,n^3 \;+\; n^2, \\
5S_4(n) &= n^5 + \frac{5}{2}\,n^4 + \frac{5}{3}\,n^3 - \frac{1}{6}\,n,
\end{aligned}$$

Après substitution, on obtient que

$$6S_5(n) = n^6 + 3\,n^5 + \frac{5}{2}\,n^4 - \frac{1}{2}\,n^2.$$

La méthode de Pascal permet de voir que $S_p(n)$ est un polynôme de degré $p+1$ et de prédire son coefficient dominant:

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \cdots.$$

C'est suffisant pour démontrer que

$$\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}.$$

Il est toutefois naturel de chercher une formule générale donnant les coefficients du polynôme $S_p(n)$. Une application de la méthode de Pascal pour $p < 12$ fournit les polynôme suivants:

$$\begin{aligned}
2S_1(n) &= n^2 + n, \\
3S_2(n) &= n^3 + \frac{3}{2}\,n^2 + \frac{1}{2}\,n, \\
4S_3(n) &= n^4 + 2\,n^3 \;+\; n^2, \\
5S_4(n) &= n^5 + \frac{5}{2}\,n^4 + \frac{5}{3}\,n^3 - \frac{1}{6}\,n, \\
6S_5(n) &= n^6 + 3\,n^5 + \frac{5}{2}\,n^4 - \frac{1}{2}\,n^2, \\
7S_6(n) &= n^7 + \frac{7}{2}\,n^6 + \frac{7}{2}\,n^5 - \frac{7}{6}\,n^3 + \frac{1}{6}\,n, \\
8S_7(n) &= n^8 + 4\,n^7 + \frac{14}{3}\,n^6 - \frac{7}{3}\,n^4 + \frac{2}{3}\,n^2, \\
9S_8(n) &= n^9 + \frac{9}{2}\,n^8 + 6\,n^7 - \frac{21}{5}\,n^5 + 2\,n^3 - \frac{3}{10}n, \\
10S_9(n) &= n^{10} + 5\,n^9 + \frac{15}{2}\,n^8 - 7\,n^6 + 5\,n^4 - \frac{3}{2}n^2, \\
11S_{10}(n) &= n^{11} + \frac{11}{2}\,n^{10} + \frac{55}{6}\,n^9 - 11\,n^7 + 11\,n^5 - \frac{11}{2}n^3 + \frac{5}{6}n, \\
12S_{11}(n) &= n^{12} + 6\,n^{11} + 11\,n^{10} - \frac{33}{2}\,n^8 + 22\,n^6 - \frac{33}{2}n^4 + 5n^2, \\
13S_{12}(n) &= n^{13} + \frac{13}{2}\,n^{12} + 13\,n^{11} - \frac{143}{6}\,n^9 + \frac{286}{7}\,n^7 - \frac{429}{10}n^5 + \frac{65}{3}n^3 - \frac{691}{210}n.
\end{aligned}$$

La régularité des coefficients n'est pas évidente. Le premier à découvrir une loi générale est Faulhaber. Essayons de retrouver sa démarche. On observe en premier lieu que

$$pS_{p-1}(n) = n^p + \frac{p}{2}n^{p-1} + \cdots \qquad \text{pour} \quad p \geq 2.$$

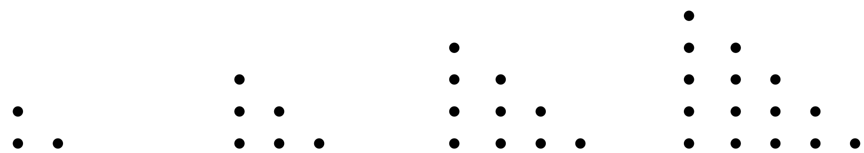
Autrement dit, le coefficient de n^{p-1} dans le polynôme $pS_{p-1}(n)$ est égal à $p/2$. Fort de ce premier succès, on peut ensuite chercher une loi régissant le coefficient de n^{p-2} pour $p \geq 3$. Voici la liste de ces coefficients pour $3 \leq p \leq 13$:

$$\tfrac{1}{2} \quad 1 \quad \tfrac{5}{3} \quad \tfrac{5}{2} \quad \tfrac{7}{2} \quad \tfrac{14}{3} \quad 6 \quad \tfrac{15}{2} \quad \tfrac{55}{6} \quad 11 \quad 13\,.$$

Ces fractions admettent 6 comme dénominateur commun. Si on les multiplie par 6 on trouve

$$3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 21 \quad 28 \quad 36 \quad 45 \quad 55 \quad 66 \quad 78.$$

On peut reconnaitre les nombres triangulaires !



3 6 10 15

Ces nombres figurent parmi les coefficients du binôme

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad \mathbf{3} \quad 1\\
1 \quad 4 \quad \mathbf{6} \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad \mathbf{10} \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad \mathbf{15} \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad \mathbf{21} \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad \mathbf{28} \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1\\
1 \quad 9 \quad \mathbf{36} \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1\\
1 \quad 10 \quad \mathbf{45} \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1\\
\cdots
\end{array}.$$

On a donc

$$pS_{p-1}(n) = n^p + \frac{p}{2}n^{p-1} + \frac{1}{6}\cdot\binom{p}{2}n^{p-2} + \cdots \quad \text{pour} \quad p \geq 3.$$

Le coefficient de n^{p-3} est nul pour tous les polynômes de notre liste. On est conduit à supposer qu'il est toujours nul. Faisons la liste des coefficients de n^{p-4} pour $5 \leq p \leq 13$:

$$\tfrac{-1}{6} \quad \tfrac{-1}{2} \quad \tfrac{-7}{6} \quad \tfrac{-7}{3} \quad \tfrac{-21}{5} \quad -7 \quad -11 \quad -\tfrac{33}{2} \quad \tfrac{-143}{6}$$

Ces fractions admettent 30 comme dénominateur commun. Si on les multiplie par -30 on trouve

$$5 \quad 15 \quad 35 \quad 70 \quad 126 \quad 210 \quad 330 \quad 495 \quad 715$$

On reconnait des coefficients du binôme:

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad \mathbf{5} \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad \mathbf{15} \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad \mathbf{35} \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad \mathbf{70} \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1\\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad \mathbf{126} \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1\\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad \mathbf{210} \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1\\
\cdots
\end{array}.$$

On est conduit à supposer que l'on a

$$pS_{p-1}(n) = n^p + \frac{p}{2}n^{p-1} + \frac{1}{6}\cdot\binom{p}{2}n^{p-2} - \frac{1}{30}\cdot\binom{p}{4}n^{p-4} + \cdots \quad \text{pour} \quad p \geq 5.$$

Faisons la liste des coefficients de n^{p-6} pour $7 \leq p \leq 13$:

$$\tfrac{1}{6} \quad \tfrac{2}{3} \quad 2 \quad 5 \quad 11 \quad 22 \quad \tfrac{286}{7}$$

Si on multiplie ces fractions par 42 on trouve

$$7 \quad 28 \quad 84 \quad 210 \quad 462 \quad 924 \quad 1716\,.$$

On reconnait encore des coefficients du binôme:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&&& \\
&&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&&& \\
&&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&\mathbf{7}&&1&&& \\
&&1&&8&&28&&56&&70&&56&&\mathbf{28}&&8&&1&& \\
&1&&9&&36&&84&&126&&126&&\mathbf{84}&&36&&9&&1& \\
1&&10&&45&&120&&210&&252&&\mathbf{210}&&120&&45&&10&&1 \\
&&&&&&\cdots&&&&&&&&&&&&&&
\end{array}.$$

On est conduit à supposer que l'on a

$$pS_{p-1}(n) = n^p + \frac{p}{2}n^{p-1} + \frac{1}{6}\cdot\binom{p}{2}n^{p-2} - \frac{1}{30}\cdot\binom{p}{4}n^{p-4} + \frac{1}{42}\cdot\binom{p}{6}n^{p-6} + \cdots \quad \text{pour} \quad p \geq 7.$$

Toutes nos observations vont dans le même sens. On trouve que

$$\begin{aligned}
2S_1(n) &= n^2 + \frac{1}{2}\binom{2}{1}n,\\
3S_2(n) &= n^3 + \frac{1}{2}\binom{3}{1}n^2 + \frac{1}{6}\binom{3}{2}n,\\
4S_3(n) &= n^4 + \frac{1}{2}\binom{4}{1}n^3 + \frac{1}{6}\binom{4}{2}n^2,\\
5S_4(n) &= n^5 + \frac{1}{2}\binom{5}{1}n^4 + \frac{1}{6}\binom{5}{2}n^3 - \frac{1}{30}\binom{5}{4}n,\\
6S_5(n) &= n^6 + \frac{1}{2}\binom{6}{1}n^5 + \frac{1}{6}\binom{6}{2}n^4 - \frac{1}{30}\binom{6}{4}n^2,\\
7S_6(n) &= n^7 + \frac{1}{2}\binom{7}{1}n^6 + \frac{1}{6}\binom{7}{2}n^5 - \frac{1}{30}\binom{7}{4}n^3 + \frac{1}{42}\binom{7}{6}n,\\
8S_7(n) &= n^8 + \frac{1}{2}\binom{8}{1}n^7 + \frac{1}{6}\binom{8}{2}n^6 - \frac{1}{30}\binom{8}{4}n^4 + \frac{1}{42}\binom{8}{6}n^2,\\
9S_8(n) &= n^9 + \frac{1}{2}\binom{9}{1}n^8 + \frac{1}{6}\binom{9}{2}n^7 - \frac{1}{30}\binom{9}{4}n^5 + \frac{1}{42}\binom{9}{6}n^3 - \frac{1}{30}\binom{9}{4}n,
\end{aligned}$$

Il existerait une suite de nombres "magiques"

$$f_0 = 1,\ \ f_1 = \frac{1}{2},\ \ f_2 = \frac{1}{6},\ \ f_3 = 0,\ \ f_4 = \frac{-1}{30},\ \ f_5 = 0,\ \ f_6 = \frac{1}{42},\ \ f_7 = 0,\ \ f_8 = \frac{-1}{30},\ldots$$

pour lesquels on a

$$pS_{p-1}(n) = f_0\binom{p}{0}n^p + f_1\binom{p}{1}n^{p-1} + f_2\binom{p}{2}n^{p-2} + \cdots + f_{p-1}\binom{p}{p-1}n.$$

Nous dirons que c'est la *formule de Faulhaber* et que les nombres $f_0, f_1, f_2 \ldots$ sont les *nombres de Faulhaber.* Il se trouve que l'on peut calculer les nombres de Faulhaber sans connaitre les polynômes $S_p(n)$. Pour cela il suffit de poser $n = 1$ dans la formule de Faulhaber. En effet on a $S_{p-1}(1) = 1$ pour $p \geq 1$. On obtient par suite une rerlation

$$p = f_0\binom{p}{0} + f_1\binom{p}{1} + f_2\binom{p}{2} + \cdots + f_{p-1}\binom{p}{p-1}.$$

Nous dirons que c'est la *relation fondamentale.* C'est une serie d'équations que l'on peut résoudre successivement:

$$\begin{array}{lll}
1 = f_0 & \text{donc} & f_0 = 1, \\
2 = f_0 + 2f_1 & \text{donc} & f_1 = \dfrac{1}{2}, \\
3 = f_0 + 3f_1 + 3f_2 & \text{donc} & f_2 = \dfrac{1}{6}, \\
4 = f_0 + 4f_1 + 6f_2 + 4f_3 & \text{donc} & f_3 = 0, \\
5 = f_0 + 5f_1 + 10f_2 + 10f_3 + 5f_4 & \text{donc} & f_4 = \dfrac{-1}{30}, \\
6 = f_0 + 6f_1 + 15f_2 + 20f_3 + 15f_4 + 6f_5 & \text{donc} & f_5 = 0, \\
7 = f_0 + 7f_7 + 21f_2 + 35f_3 + 35f_4 + 21f_5 + 7f_6 & \text{donc} & f_6 = \dfrac{1}{42}, \\
\quad \text{etc} \ldots. & &
\end{array}$$

On constate que $f_{2n+1} = 0$ sauf si $n = 0$. Pour démontrer cette observation et bien d'autres il est important de mieux comprendre la relation fondamentale. Dans cette relation, le membre de droite contient tout les termes de la forme $f_k\binom{p}{k}$ sauf le terme $f_k\binom{p}{p} = f_p$. Si on ajoute ce terme aux membres, la relation fondamentale prend une forme légèrement différente:

$$p + f_p = f_0\binom{p}{0} + f_1\binom{p}{1} + \cdots + f_p\binom{p}{p}.$$

Quiconque est familier avec le produit de deux séries de Taylor éprouve ici une certaine émotion. En effet, si

$$\left(a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(b_0 + b_1\frac{x}{1!} + b_2\frac{x^2}{2!} + \cdots\right) = c_0 + c_1\frac{x}{1!} + c_2\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

alors

$$c_n = a_n b_0\binom{n}{0} + a_{n-1}b_1\binom{n}{1} + \cdots + a_0 b_n\binom{n}{0}.$$

Introduisons la série

$$F(x) = f_0 + f_1\frac{x}{1!} + f_2\frac{x^2}{2!} + f_3\frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

On dit que $F(x)$ est la *série génératrice exponentielle* des nombres de Faulhaber. L'idée des série génératrice est due à Euler. On dit que $F(x)$ est *exponentielle* à cause de la présence des factorielles. On peut exprimer la relation fondamentale entre les nombres de Faulhaber comme une égalité entre séries:

$$(0 + f_0) + (1 + f_1)\frac{x}{1!} + (2 + f_2)\frac{x^2}{2!} + \cdots = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(f_0 + f_1\frac{x}{1!} + f_2\frac{x^2}{2!} + \cdots\right).$$

On peut donner à cette relation une forme plus compacte en utilisant les sériea

$$e^x == 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \text{et} \quad xe^x = 0 + 1\frac{x}{1!} + 2\frac{x^2}{2!} + 3\frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

La relation devient $xe^x + F(x) = e^x F(x)$. Il en résulte que $xe^x = (e^x - 1)F(x)$ et par suite que

$$F(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}.$$

Euler introduit toutefois une autre série génératrice:

$$B(x) = \frac{x}{e^x - 1} = B_0 + B_1 \frac{x}{1!} + B_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots.$$

On dit que les coefficients B_n de cette série sont les *nombres de Bernoulli*. Les séries $B(x)$ et $F(x)$ ne diffèrent que légèrement:

$$F(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x - 1} + x = B(x) + x.$$

Par suite

$$f_n = \begin{cases} B_n & \text{si } n \neq 1 \\ B_1 - 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}.$$

Mais il y a une autre relation entre $B(x)$ et $F(x)$:

$$B(-x) = \frac{-x}{e^{-x} - 1} = \frac{-xe^x}{1 - e^x} = \frac{xe^x}{e^x - 1} = F(x).$$

En comparant les coefficients de $B(-x)$ et de $F(x)$, on trouve que

$$(-1)^n B_n = f_n \quad \text{pour} \quad n \geq 0.$$

Comment peut-on concilier cette relation avec la précédente? Pour cela il faut que $-f_1 = f_1 - 1$ et que $(-1)^n f_n = f_n$ pour $n \neq 1$. La première condition signifie que l'on a $f_1 = \frac{1}{2}$. La deuxième signifie que l'on a $f_n = 0$ pour n impair > 1. Nous avons montré sans le vouloir que les nombres de Faulhaber de rang impair > 1 sont nuls!

§ 1 Les nombres et polynômes de Bernoulli

On peut associer plusieurs séries génératrices à une suite des nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots,$. Par exemple, les deux séries

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \quad \text{et} \quad g(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + +a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Pour les distinguer nous dirons que $f(x)$ est la série génératrice *ordinaire* et que $g(x)$ est la série génératrice *exponentielle.* Nous dirons aussi que $a_n = g^{(n)}(0)$ est un *coefficient de Taylor* de $g(x)$. Depuis Euler, les nombres de Bernoulli sont définit comme les coefficients de Taylor de la série génératrice exponentielle

$$B(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

La relation $(e^x - 1)B(x) = x$ entraîne que l'on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases} \qquad (*)$$

Par suite,

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ 2B_1 + B_0 = 0 \quad &\text{donc} \quad B_1 = \frac{-1}{2} \\ 3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0 \quad &\text{donc} \quad B_2 = \frac{1}{6} \\ 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + B_0 = 0 \quad &\text{donc} \quad B_3 = 0 \\ 5B_4 + 10B_3 + 10B_2 + 5B_1 + B_0 = 0 \quad &\text{donc} \quad B_4 = \frac{-1}{30} \\ &\cdots \end{aligned}.$$

Les premières valeurs de B_n sont le suivantes:

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}	B_{16}	B_{17}
1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$\frac{-691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0	$\frac{-3617}{510}$	0

Remarquer que $\mid B_{2n} \mid < 1$ pour $n \leq 6$ et que $B_{14} = \frac{7}{6} > 1$.

Proposition. *On a*

$$B(x) + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \coth\Big(\frac{x}{2}\Big).$$

De plus, $B_{2n+1} = 0$ *pour tout* $n > 0$.

Preuve: Observons d'abord que

$$\coth\Big(\frac{x}{2}\Big) = \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}.$$

Si on substitue $a = e^x$ dans l'identité

$$\frac{a+1}{a-1} = \frac{2}{a-1} + 1,$$

on obtient que

$$\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2}{e^x - 1} + 1.$$

Par suite,
$$\frac{x}{2}\coth\Big(\frac{x}{2}\Big) = \frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2} = B(x) + \frac{x}{2}.$$
La fonction $B(x)+\frac{x}{2}$ est paire puisque $\coth(x)$ est une fonction impaire. Cela montre que $B_{2n+1}=0$ pour $n>0$. CQFD

On définit les *polynômes de Bernoulli* $B_n(t)$ par la série génératrice
$$B(x)e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)\frac{x^n}{n!}.$$
Cette définition implique que
$$B_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i\, t^{n-i}.$$
On trouve
$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1\\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2}\\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}\\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}\\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x\\
B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}
\end{aligned}$$
Remarquer que $B_n(0) = B_n$.

Les polynomes de Bernoulli satisfont plusieurs identités remarquables. En voici quelques unes.

Proposition. *Pour tout entier $n \geq 1$ on a*
$$B_n'(t) = nB_{n-1}(t)$$
Preuve: En effet, on a
$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n'(t)\frac{x^n}{n!} = \frac{d}{dt}B(x)e^{tx} = xB(x)e^{tx} = x\sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} nB_{n-1}(t)\frac{x^n}{n!}.$$
CQFD

Proposition. *Pour tout entier $n \geq 0$ on a*
$$B_n(s+t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i(s)\, t^{n-i}$$
Preuve: En effet, on a $B(x)e^{(t+s)x} = (B(x)e^{sx})\,e^{tx}$. CQFD

Proposition. *On a* $B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$ *pour tout* $n \geq 0$.

Preuve: En effet, on a

$$\frac{x\,e^{(t+1)x}}{e^x-1} - \frac{x\,e^{tx}}{e^x-1} = \frac{x\,e^{tx}(e^x-1)}{e^x-1} = xe^{tx}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}\frac{x^n}{n!}.$$

CQFD

Proposition. *On a* $B_n(1-t) = (-1)^n B_n(t)$ *pour tout* $n \geq 0$.

Preuve: En effet,

$$\frac{xe^{x(1-t)}}{e^x-1} = \frac{xe^x e^{-tx}}{e^x-1} = \frac{xe^{-tx}}{1-e^{-x}} = \frac{(-x)e^{t(-x)}}{e^{-x}-1} = \sum_{n\geq 0} B_n(t)\frac{(-x)^n}{n!}.$$

CQFD.

En particulier, on obtient que $B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$ pour tout $n \geq 0$. Comme $B_n(0) = B_n$ est nul si n est impair > 1, cela montre que

$$B_n(1) = B_n(0) \quad \text{pour} \quad n \neq 1.$$

De plus, on obtient que $B_n(\frac{1}{2}) = (-1)^n B_n(\frac{1}{2})$. Cela montre que $B_n(\frac{1}{2}) = 0$ si n est impair.

Proposition. *Pour tout entier* $p > 0$ *et tout entier* $n \geq 1$ *on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1}\big[B_{p+1}(n) - B_{p+1}(0)\big] = \int_0^n B_p(x)\,dx.$$

Preuve: En effet, on a $B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k) = (p+1)k^p$ d'après la proposition précédente. Cela implique par somme télescopique que

$$B_{p+1}(n) - B_{p+1}(0) = (p+1)\sum_{k=0}^{n-1} k^p.$$

La seconde formule provient de l'identité $B'_{p+1}(x) = (p+1)B_p(x)$ de la proposition ?. CQFD

Nous pouvons maintenant démontrer la formule de Faulhaber. En effet,

$$p\sum_{k=0}^{n} k^{p-1} = pn^{p-1} + B_p(n) - B_p(0) = pn^{p-1} + n^p - \frac{p}{2}n^{p-1} + \sum_{i=2}^{p-1} B_i\binom{p}{i}n^{p-i}$$
$$= n^p + \frac{p}{2}n^{p-1} + \sum_{i=2}^{p-1} B_i\binom{p}{i}n^{p-i}.$$

Une autre identité remarquable satisfaite par les polynômes de Bernoulli est la *formule de multiplication*:

Proposition. *Pour tout entiers $q \geq 1$ et $n \geq 0$, on a*

$$qB_n(qx) = q^n \sum_{k=0}^{q-1} B_n\Big(x + \frac{k}{q}\Big).$$

Preuve: Posons

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{q-1} q^n B_n\Big(t + \frac{k}{q}\Big).$$

Pour k fixé, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n B_n\Big(t + \frac{k}{q}\Big)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\Big(t + \frac{k}{q}\Big)\frac{(qx)^n}{n!} = \frac{qx\, e^{(t+\frac{k}{q})qx}}{e^{qx}-1} = \frac{qx\, e^{tqx}}{e^{qx}-1}e^{kx}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\frac{x^n}{n!} &= \frac{qx\, e^{tqx}}{e^{qx}-1}\sum_{k=0}^{q-1} e^{kx} = \frac{qx\, e^{tqx}}{e^{qx}-1}\ \frac{e^{qx}-1}{e^{x}-1} \\ &= q\,\frac{x\, e^{tqx}}{e^{x}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} qB_n(qt)\frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

CQFD

Proposition. *On a*

$$x\ \coth(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} B_{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad x \cot x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} \mid B_{2n} \mid \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Preuve: Le premier développement provient de l'identité $x \coth x = x + B(2x)$. Le second s'obtient en remplacant x par ix dans le premier et en utilisant le fait que l'on a $(-1)^n B_{2n} = - \mid B_{2n} \mid$ pour $n > 0$, d'après la proposition ?. CQFD

Euler a montré que les coefficients de Taylor de la fonction $\cot(x)$ sont donnés par les valeurs de la fonction zeta

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

pour s un entier pair > 0. Plus précisément, il a montré que

$$\pi x \cot(\pi x) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k)x^{2k}.$$

Pour le voir il suffit d'utiliser le produit d'Euler

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \Big(1 - \frac{x^2}{1^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{2^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{3^2}\Big)\cdots.$$

Si on prend la dérivé logarithmique d'un produit

$$f = \prod_i f_i,$$

on peut le transformer en somme. En effet, sous certaines conditions de convergence on a

$$\frac{f'}{f} = \sum_i \frac{f_i'}{f_i}.$$

Si on prend la dérivée logarithmique du produit d'Euler, on obtient

$$\pi\cot(\pi x) - \frac{1}{x} = \frac{-2x}{1^2 - x^2} + \frac{-2x}{2^2 - x^2} + \frac{-2x}{3^2 - x^2} + \cdots.$$

Par suite,

$$\pi x\cot(\pi x) = 1 - 2\left[\frac{x^2}{1^2 - x^2} + \frac{x^2}{2^2 - x^2} + \frac{x^2}{3^2 - x^2} + \cdots\right].$$

Mais on a

$$\frac{x^2}{n^2 - x^2} = \frac{x^2}{n^2}\cdot\frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{n^{2k}}.$$

Par suite,

$$\pi x\cot(\pi x) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{n^{2k}} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{n^{2k}} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)x^{2k}.$$

Remarque: Un esprit critique sera insatisfait de la démonstration que nous venons de présenter car elle repose sur des hypothèse de convergence qui n'ont pas été vérifiées. En toute bonne foi, nous devons admettre que ces critiques sont justifiées. Nous ne faisons que respecter le style d'Euler. Un démonstration plus rigoureuse du même résultat sera donnée dans [].

Proposition . (Euler) *On a*

$$\zeta(2n) = \frac{\mid B_{2n}\mid}{2}\cdot\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

pour tout $n > 0$. Les nombres B_{2n} sont alternativement de signe contraire à partir de $B_2 > 0$.

Preuve: Si on remplace ensuite x par πx dans le développement de $x\coth x$ obtenue à la proposition ?, on obtient que

$$\pi x\cdot\cot(\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n}B_{2n}\pi^{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Une comparaison avec les coefficients du développement d'Euler de $\pi x\cot(\pi x)$ montre l'on a

$$2\zeta(2n) = -(-1)^n B_{2n}\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{pour} \quad n > 0.$$

Comme $\zeta(2n) > 0$, on obtient que

$$\zeta(2n) = \frac{\mid B_{2n}\mid}{2}\cdot\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}.$$

Cela montre aussi que $(-1)^{n-1}B_{2n} > 0$ pour tout $n > 0$. CQFD

Admirons quelques-uns des résultats d'Euler:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\cdot 3}\pi^2 &= \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\\
\frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 5}\pi^4 &= \frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\\
\frac{1}{3^3\cdot 5\cdot 7}\pi^6 &= \frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots\\
\frac{1}{2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7}\pi^8 &= \frac{1}{1^8}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\cdots\\
\frac{1}{3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}\pi^{10} &= \frac{1}{1^{10}}+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\cdots\\
\frac{691}{3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13}\pi^{12} &= \frac{1}{1^{12}}+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\cdots\\
\frac{2}{3^6\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13}\pi^{14} &= \frac{1}{1^{14}}+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\cdots\\
&\cdots
\end{aligned}$$

La formule d'Euler

$$\mid B_{2n} \mid = 2\cdot\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n)$$

permet d'estimer la grandeur de $\mid B_{2n}\mid$ lorsque $n\to\infty$. En effet, on a $\zeta(2n)\to 1$ lorsque $n\to\infty$. Par suite,

$$\mid B_{2n} \mid \sim 2\cdot\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}.$$

Si on utilise l'approximation de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n,$$

on trouve que

$$\mid B_{2n} \mid \sim 4\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}.$$

On voit que $\mid B_{2n}\mid$ croit rapidement lorsque $n\to\infty$. Par exemple,

$$\begin{aligned}
B_{10} &= \frac{5}{66}\\
B_{20} &= -\frac{174611}{330}\\
B_{30} &= \frac{8615841276005}{14322}\\
B_{40} &= -\frac{261082718496449122051}{13530}\\
B_{50} &= \frac{495057205241079648212477525}{66}.
\end{aligned}$$

§ Exercices

Exercice: Montrer que $x+B(x)=e^xB(x)=B(-x)$.

Exercice: Montrer que

$$\frac{e^{tx}-1}{e^x-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}(t)-B_{k+1}(0)}{k+1}\,\frac{x^k}{k!}.$$

En déduire que

$$\frac{B_{k+1}(n+1)-B_{k+1}(0)}{k+1} = 0^k + 1^k + \cdots + n^k.$$

Suggestion: Utiliser l'identité

$$\frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1} = 1 + e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}.$$

Exercice: Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$2^n B_n\Big(\frac{1}{2}\Big) = \big(2-2^n\big)B_n \quad \text{et} \quad 4^{2n} B_{2n}\Big(\frac{1}{4}\Big) = \big(2-2^{2n}\big)B_{2n}$$

Suggestion: Utiliser la formule de multiplication et l'identité $B_{2n}(1-x) = B_{2n}(x)$..

Exercice: Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$2 \cdot 3^{2n} B_{2n}\Big(\frac{1}{3}\Big) = \big(3-3^{2n}\big)B_{2n} \quad \text{et} \quad 2 \cdot 6^{2n} B_{2n}\Big(\frac{1}{6}\Big) = \big(2-2^{2n}\big)\big(3-3^{2n}\big)B_{2n}$$

Suggestion: Utiliser la formule de multiplication et l'identité $B_{2n}(1-x) = B_{2n}(x)$.

Exercise: Montrer que

$$\frac{\zeta(s)}{2^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots$$

On définit la fonction $\lambda(s)$ de Dirichlet en posant

$$\lambda(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots$$

Exercise: Montrer que

$$\lambda(s) = \Big(1 - \frac{1}{2^s}\Big)\zeta(s).$$

On définit la fonction $\eta(s)$ de Dirichlet en posant

$$\eta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \cdots.$$

Exercise: Montrer que

$$\eta(s) = \Big(1 - \frac{2}{2^s}\Big)\zeta(s).$$

Remarque: Ce dernier résultat permet de définir la fonction $\zeta(s)$ pour $0 < s < 1$. En effet, une série alternée $S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$ converge si son terme général tend vers 0 et si $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \cdots$. Si $0 < s < 1$, on peut poser

$$\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{1 - \frac{2}{2^s}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{2^s}} \left(1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \cdots. \right)$$

§2 Développements de Fourier

Le résultat d'Euler sur les valeurs $\zeta(2n)$ peut s'obtenir en développant les polynômes de Bernoulli en séries de Fourier. Pour cela, nous utiliserons la caractérisation suivante des polynômes de Bernoulli.

Proposition. *La suite de polynômes $B_0(x), B_1(x), B_2(x), \cdots$ est la seule satisfaisant aux conditions suivantes:*
(i) $B_0(x) = 1$,
(ii) $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$ *pour tout* $n > 0$,
(iii) $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$ *pour tout* $n > 0$.

Preuve: Nous avons vu que $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$. On sait que $B_n(1) = B_n(0)$ pour $n > 1$. Par suite,

$$\int_0^1 B_n(x)dx = \frac{1}{n+1}\Big[B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)\Big] = 0$$

pour tout $n > 0$. Soit $C_0(x), C_1(x), C_2(x), \cdots$ une suite de polynômes satisfaisant aux conditions (i), (ii) et (iii). Démontrons que $C_n(x) = B_n(x)$ par induction sur n. C'est évident si $n = 0$. Si $n > 0$, on a $C_n'(x) = nC_{n-1}(x) = nB_{n-1}(x) = B_n'(x)$ par l'hypothèse d'induction. Donc $C_n(x) = B_n(x) + K$ pour une constante K. Mais alors

$$K = K + \int_0^1 B_n(x)dx = \int_0^1 (K + B_n(x))dx = \int_0^1 C_n(x)dx = 0.$$

CQFD

Proposition. *Si* $0 < x < 1$, *on a*

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{\pi k}.$$

Preuve: Par un théorème de Dirichlet, la fonction $B_1(x)$ possède un développement en série de Frourier sur l'intervalle $(0, 1)$:

$$B_1(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx).$$

Les coefficients sont donnés par les formules classiques

$$a_0 = \int_0^1 B_1(x)dx, \qquad a_k = 2\int_0^1 B_1(x)\cos(2\pi kx)dx \quad \text{et} \quad b_k = 2\int_0^1 B_1(x)\sin(2\pi kx)dx \quad \text{pour} \quad k > 0.$$

La relation de symétrie $B_1(1-x) = -B_1(x)$ implique que $a_k = 0$ pour tout $k \geq 0$. Une intégration par partie donne

$$\int_0^1 B_1(x)\sin(2\pi kx)dx = \frac{-1}{2\pi k} + \int_0^1 \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k}dx = \frac{-1}{2\pi k}.$$

CQFD

Si on intègre terme à terme le développement en série de Fourier de $B_1(x)$, on obtient un développement en série de Fourier

$$\frac{B_2(x)}{2} = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{(2\pi k)^2}$$

pour une constante a_0. Le coefficient a_0 est nul car on a

$$0 = \int_0^1 B_2(x)\,dx$$

par la proposition ?. Nous avons montré que

$$\frac{B_2(x)}{2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{(2\pi k)^2}.$$

Plus généralement,

Proposition. *Si* $0 \leq x \leq 1$, *on a*

$$(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}(x)}{2}\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^{2n}} \quad \text{pour} \quad n > 0,$$

$$(-1)^{n-1}\frac{B_{2n+1}(x)}{2}\frac{(2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^{2n+1}} \quad \text{pour} \quad n \geq 0.$$

Preuve: On raisonne par récurrence sur n. Si on intègre terme à terme le développement de Fourier de $B_{2n}(x)$ on obtient que

$$(-1)^{n-1}\frac{B_{2n+1}(x)}{2}\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n+1)!} = a_0 + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^{2n+1}}.$$

Le coefficient a_0 est nul car

$$0 = \int_0^1 B_{2n+1}(x)dx.$$

Cela donne le développement de $B_{2n+1}(x)$. De même, le développement de $B_{2n+2}(x)$ s'obtient en intégrant terme à terme le développement de Fourier de $B_{2n+1}(x)$. CQFD

Si on met $x = 0$ dans le développement de Fourier $B_{2n}(x)$, on obtient la formule d'Euler:

$$(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}(0)}{2}\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} = \zeta(2n).$$

La fonction $\beta(s)$ de Dirichlet est définie en posant

$$\beta(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots.$$

Proposition. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$\beta(2n+1) = \frac{\mid B_{2n+1}\left(\frac{1}{4}\right) \mid}{2} \frac{(2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Preuve: Il suffit de poser $x = \frac{1}{4}$ dans le dérveloppement de Fourier

$$(-1)^{n-1} \frac{B_{2n+1}(x)}{2} \frac{(2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi k x)}{k^{2n+1}}.$$

CQFD

On obtient en particulier que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^2}\pi &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \\
\frac{1}{2^5}\pi^3 &= 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots \\
\frac{5}{2^9 \cdot 3}\pi^5 &= 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots \\
\frac{61}{2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5}\pi^7 &= 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \cdots \\
\frac{277}{2^{17} \cdot 3^2 \cdot 5}\pi^9 &= 1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{7^9} + \cdots.
\end{aligned}$$

Remarque: La nature arithmétique du nombre

$$\beta(2) = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$$

est inconnue. On dit que c'est la *constante de Catalan.* Eugène Charles Catalan (1814-1894) est célèbre pour avoir montré que le nombre de subdivisions en triangles d'un polygone régulier de n cotés est égal au *nombre de Catalan*:

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Si on divise le développement de Fourier $B_{2n}(x)$ par sa valeur en $x = 0$ on trouve que

$$\frac{B_{2n}(x)}{B_{2n}(0)} = \frac{1}{\zeta(2n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k x)}{k^{2n}} \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

De même, si on divise le développement de Fourier $B_{2n}(x)$ par $B'_{2n+1}(0) = (2n+1)B_{2n}(0)$, on trouve que

$$\frac{B_{2n+1}(x)}{B'_{2n+1}(0)} = \frac{1}{\zeta(2n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi k x)}{2\pi \cdot k^{2n+1}} \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Le polynôme normalisé $\frac{B_{2n}(x)}{B_{2n}(0)}$ prend la valeur 1 en $x = 0$. Nous allons montrer qu'il converge uniformément vers $\cos(2\pi x)$.

Corollaire. *Si $n \to \infty$, les polynômes normalisés convergent*

$$\frac{B_{2n}(x)}{B_{2n}(0)} \to \cos(2\pi x) \qquad \text{et} \qquad \frac{B_{2n+1}(x)}{B'_{2n+1}(0)} \to \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi},$$

uniformément sur tout intervalle borné.

Preuve: On sait que pour $0 \leq x \leq 1$, on a

$$\frac{B_{2n}(x)}{B_{2n}(0)} = \frac{1}{\zeta(2n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^{2n}}.$$

Remarquer que $\zeta(2n) \to 1$ lorsque $n \to \infty$. De plus,

$$\left(\cos(2\pi x) + \frac{\cos(4\pi x)}{2^{2n}} + \frac{\cos(6\pi x)}{3^{2n}} + \cdots\right) \to \cos(2\pi x)$$

uniformément lorsque $n \to \infty$. Le premier résultat est démontré si $0 \leq x \leq 1$. Si $x > 1$ on peut raisonner par induction sur $r = [x]$. Le cas $x < 0$ se ramène au cas $x > 1$ en utilisant la symmétrie $B_{2n}(x) = B_{2n}(1-x)$. On a $B_{2n}(x+1) = B_{2n}(x) + 2nx^{2n-1}$. Par suite,

$$\frac{B_{2n}(x+1)}{B_{2n}} = \frac{B_{2n}(x)}{B_{2n}} + \frac{2nx^{2n-1}}{B_{2n}}.$$

Il suffit de montrer que

$$\frac{2n}{B_{2n}} x^{2n-1} \to 0$$

uniformément pour x borné. Mais c'est une conséquence de la formule asymptotique

$$| B_{2n} | \sim 4\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}.$$

On montre de même que

$$\frac{B_{2n+1}(x)}{B'_{2n+1}(0)} \to \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}$$

uniformément sur tout intervalle borné lorsque $n \to \infty$.

Proposition. *Si $0 \leq x \leq 1$, on a*

$$| B_{2n}(x) | \leq | B_{2n} | .$$

Preuve: En effet, si $0 \leq x \leq 1$, on a

$$B_{2n}(x) = \frac{B_{2n}}{\zeta(2n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^{2n}}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} | B_{2n}(x) | &\leq \frac{| B_{2n} |}{\zeta(2n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{| \cos(2\pi kx) |}{k^{2n}} \\ &\leq \frac{| B_{2n} |}{\zeta(2n)} \zeta(2n) = | B_{2n} | . \end{aligned}$$

CQFD

§ 3 La formule sommatoire d'Euler-MacLaurin

Supposons que l'on veuille calculer $\zeta(3)$ avec 100 décimales exactes. Ce calcul n'est pas sans intéret. On ignore la nature des valeurs de la fonction $\zeta(s)$ pour s un entier impair $s > 1$, bien que l'on sache maintenant que $\zeta(3)$ est irrationnel. Euler a lui-même calculé $\zeta(3)$ a plus de 15 décimales exactes. Avec les ordinateurs on devrait pouvoir faire mieux. La première méthode qui vient à l'esprit est de calculer la somme S_n des n premiers termes de la série

$$\zeta(3) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3}$$

pour n assez grand. Une bonne estimation de l'erreur $\zeta(3) - S_n$ est donnée par l'inégalité

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^3} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2n^2}.$$

Pour avoir $\zeta(3) - S_n < 10^{-100}$ il faudrait que l'on ait $n > 10^{49}$. Mais l'addition de 10^{49} termes successifs est une tâche absolument impossible à réaliser avec les ordinateurs actuels, même les plus puissants. Il faut donc trouver une autre méthode. La *formule sommatoire d'Euler-MacLaurin* est la réponse. Elle permet d'approcher une somme par une intégrale et de calculer très précisément la différence. Avant de présenter la formule générale nous allons l'étudier dans sa forme la plus élémentaire. Dénotons par par $[x]$ la partie entière d'un nombre réel x et par $\{x\}$ sa partie fractionnaire $x - [x]$.

Proposition. *(Forme élémentaire de la formule sommatoire) Soient $a < b$ des entiers et f est une fonction différentiable sur l'intervalle $[a, b]$. Alors on a*

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = \int_a^b f(x)\,dx \;+ \frac{f(b)+f(a)}{2} \;+ \int_a^b f'(x)\Big(\{x\} - \frac{1}{2}\Big)dx \qquad (*).$$

Preuve: Pour un entier $a \leq n < b$, une intégration par partie donne

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx = \frac{f(n)+f(n+1)}{2} - \int_n^{n+1} f'(x)\Big(x - n - \frac{1}{2}\Big)dx$$

Comme on a $x - n - \frac{1}{2} = \{x\} - \frac{1}{2}$ pour $n < x < n+1$, on peut écrire

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx = \frac{f(n)+f(n+1)}{2} - \int_n^{n+1} f'(x)\Big(\{x\} - \frac{1}{2}\Big)dx$$

En additionnant ces égalités pour les valeurs successives de $n = a, a+1, \ldots, b-1$, on obtient la formule sommatoire

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=a}^{b} f(i) - \frac{f(a)+f(b)}{2} - \int_a^b f'(x)\Big(\{x\} - \frac{1}{2}\Big)dx$$

CQFD

Bien qu'élémentaire, cette formule est suffisament puissante pour donner la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n.$$

En effet, d'après la formule sommatoire, pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}\log n! = \sum_{k=1}^{n} \log k &= \int_1^n \log x\, dx - \frac{\log n}{2} + R(n)\\ &= n\log n - n + 1 - \frac{\log n}{2} + R(n).\end{aligned}$$

avec

$$R(n) = \int_1^n \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{x} dx.$$

Montrons que le reste $R(n)$ tend vers une limite $R(\infty)$ lorsque $n \to \infty$. La fonction $\{x\} - \frac{1}{2}$ est périodique de période 1. Comme on a

$$\int_0^1 \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) dt = 0$$

la fonction

$$U(x) = \int_0^x \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) dt$$

est aussi périodique. En intégrant par partie, on obtient que pour un entier $n \geq 1$, on a

$$\int_1^n \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{x} dx = \int_1^n \frac{U(x)}{x^2} dx.$$

Le second membre de cette égalité converge lorsque $n \to \infty$ car la fonction $\mid U(x) \mid$ est bornée par une constante M et que

$$\int_1^\infty \frac{\mid U(x) \mid}{x^2} dx \leq M \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = M.$$

Cela prouve que $R(\infty)$ existe. La différence $R'(n) = R(\infty) - R(n)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. On peut écrire

$$\log n! = n \log n - n + C' - \frac{\log n}{2} - R'(n).$$

avec $C' = 1 + R(\infty)$. En substituant cette égalité dans la fonction l'exponentielle, on obtient une égalité asymptotique

$$n! \sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

avec $K = e^{C'}$. Il reste à montrer que $K = \sqrt{2\pi}$. Pour cela, on peut utiliser la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3}\right)\left(\frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5}\right)\left(\frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7}\right) \cdots .$$

Remarquer que l'on a

$$\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\right)\left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}\right) \cdots \left(\frac{(2n-1) \cdot (2n+1)}{2n \cdot 2n}\right) = \frac{1}{2^{4n}} \binom{2n}{n}^2 (2n+1).$$

Cela montre que la formule de Wallis équivaut à une l'égalité asymptotique

$$\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Mais on a

$$n! \sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{et} \quad (2n)! \sim K\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}.$$

Par suite,

$$\frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{K\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{K^2 n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Après cancellation, on trouve que $K = \sqrt{2\pi}$. Nous avons obtenu la formule de Stirling.

La clé de la formule sommatoire générale réside dans la lemme suivant. Remarquons que $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

Lemme. *Soit $g(x)$ une fonction différentiable définie sur l'intervalle $[0,1]$. Si $k > 0$, on a*

$$\int_0^1 g(x)\frac{B_k(x)}{k!}dx = \Big[g(1) - g(0)\Big]\frac{B_{k+1}}{(k+1)!} - \int_0^1 g'(x)\frac{B_{k+1}(x)}{(k+1)!}dx.$$

Preuve: On a $B'_{k+1} = (k+1)B_k(x)$. De plus, $B_{k+1}(1) = B_{k+1}(0)$ si $k > 0$. Le résultat s'obtient en intégrant par partie. CQFD

Théorème. *(*Formule sommatoire d'Euler-MacLaurin*) Soient $a < b$ des entiers et f est une fonction k-fois différentiable sur l'intervalle $[a,b]$. Alors on a*

$$\sum_{a\le i\le b} f(i) = \int_a^b f(x)dx + \frac{f(b)+f(a)}{2} \quad + \sum_{i=2}^{k}\Big[f^{(i-1)}(b) - f^{(i-1)}(a)\Big]\frac{B_i}{i!} \quad + \quad R_k$$

$$\text{avec} \quad R_k = (-1)^{k+1}\int_a^b f^{(k)}(x)\frac{B_k(\{x\})}{k!}dx.$$

Preuve: Nous avons déjà établit la formule dans le cas $k = 1$. Dans le cas général, on peut supposer $a = 0$ et $b = 1$. Nous allons raisonner par induction sur $k > 0$. Remarquer que $(-1)^{k+1}B_{k+1} = B_{k+1}$ car B_{k+1} est nul si $k+1$ est impair > 1. D'après le lemme, on a

$$R_k = \Big[f^{(k)}(1) - f^{(k)}(0)\Big]\frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \quad + \quad R_{k+1}$$

Le résultat suit. CQFD.

Remarque 1: On peut donner à la formule sommatoire une forme plus régulière:

$$\sum_{a\le i<b} f(i) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{i=1}^{k}\Big[f^{(i-1)}(b) - f^{(i-1)}(a)\Big]\frac{B_i}{i!} \quad + \quad R_k.$$

Remarque 2: Nous avons vu que

$$R_k - R_{k+1} = \Big[f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)\Big]\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}$$

pour $k > 0$. Par suite, $R_{2k} = R_{2k+1}$ pour $k > 0$. Si on élimine les terme nuls, la formule sommatoire devient une somme télescopique:

$$\sum_{a\le i\le b} f(i) = \int_a^b f(x)dx + \frac{f(b)+f(a)}{2} \quad + (R_1 - R_2) + (R_2 - R_4) + \cdots (R_{2m-2} - R_{2m}) + R_{2m}.$$

Revenons au calcul de $\zeta(3)$ avec plus de 100 décimales exactes. Pour ce faire on peut commencer par calculer la somme

$$S_{999} = \sum_{i=1}^{999} \frac{1}{i^3}$$

à plus de 100 décimales exactes, ce qui est facilement réalisable par ordinateur. On trouve

$$\begin{aligned} S_{999} = 1.&202056403659344285483071411511599990348321270903 \\ &177513503654096611857257192140083613008412326047311119 \end{aligned}$$

Il reste ensuite à calculer la différence $S'_{1000} = \zeta(3) - S_{999}$ avec une précision suffisante. Pour cela on utilise la formule sommatoire d'Euler MacLaurin. Si $f(x) = x^{-3}$, on voit facilement que l'on a

$$f^{(i)}(x) = (-1)^i 3(3+1)\cdots(3+i-1)x^{-3-i} = (-1)^i \frac{(i+2)!}{2} x^{-3-i}$$

pour tout $i \geq 0$. Si $a = n$ et $b = \infty$, la formule sommatoire donne

$$S'_n = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^3} = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \sum_{i=1}^{2m} \frac{(2i+1)B_{2i}}{2n^{2i+2}} + R_{2m}$$

avec

$$R_{2m} = -(m+1)(2m+1) \int_n^{\infty} \frac{B_{2m}(\{x\})}{x^{3+2m}} dx.$$

Il est facile de majorer R_{2m}. En effet, on a $\mid B_{2m}(\{x\}) \mid \leq \mid B_{2m} \mid$ d'après ?. Étant donné que $f^{(2m)}(x) \geq 0$, on obtient que

$$\mid R_{2m} \mid \leq (m+1)(2m+1) \mid B_{2m} \mid \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{3+2m}} = \frac{(2m+1) \mid B_{2m} \mid}{2 \cdot n^{2m+2}}$$

Cela montre que le reste R_{2m} est inférieur en valeur absolu au dernier terme utilisé dans formule sommatoire. Comme $n = 1000$, il faut donc choisir m de sorte que

$$\frac{(2m+1) \mid B_{2m} \mid}{2 \cdot 1000^{2m+2}} < 10^{-100}.$$

Après quelques tâtonnements, on trouve que

$$\frac{33}{2} \frac{\mid B_{32} \mid}{1000^{34}} = .117 \times 10^{-99} \quad \text{et que} \quad \frac{37}{2} \frac{\mid B_{36} \mid}{1000^{38}} = .102 \times 10^{-110}.$$

Il suffit donc de prendre $m = 18$. Avec cette valeur de m on obtient que

$$\begin{aligned} S'_{1000} = .&000000500499999999991666674999985000004166665021437 \\ &321368288861745872998094859417300657344746128328794695. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \zeta(3) = S_{999} + S'_{1000} = 1.&202056903159594285399738161511449990764986292340 \\ &49888179227155534183820578631309018645587360933525815 \end{aligned}$$

Nous venons de terminer un calcul que la **puissance électronique brute** ne pourra jamais égaler ! Remarquons ici que le choix de $n = 1000$ n'était pas entièrement arbitraire. Si n est trop petit il devient impossible de satisfaire la contrainte

$$\frac{(2m+1) \mid B_{2m} \mid}{2 \cdot n^{2m+2}} < 10^{-100}$$

pour une valeur de m. Cela provient du fait que pour n fixé, le terme général $T(k)$ de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)B_{2k}}{2n^{2k+2}}$$

tend vers l'infinie! On effet, dans la section ? nous avons démontré l'égalité asymptotique

$$| B_{2k} | \sim 4\sqrt{\pi k}\left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k}.$$

Par suite

$$T(k) \sim \frac{4\sqrt{\pi k}}{n^2}\left(\frac{k}{n\pi e}\right)^{2k}.$$

Cela montre que $T(k) \to \infty$, lorsque $k \to \infty$ car la fonction k^{2k} croit plus vite que n'importe laquelle exponentielle a^k. Toutefois, avant de devenir grand, le terme $T(k)$ prend des valeurs très petite si n est grand. Mais si on choisit n petit il faut utiliser un plus grand nombre de terme de la formule sommatoire pour compenser. Mais si n est trop petit, la formule sommatoire peut devenir inutile pour atteindre une précision fixé. Il est très important d'estimer la grandeur du reste de la formule sommatoire.

Proposition. *Si la fonction $f^{(2m)}(x)$ ne change pas de signe dans l'intervalle $[a, b]$, alors le reste R_{2m} est inférieur en valeur absolu au dernier terme utilisé dans la formule sommatoire.*

Preuve: On peut supposer que $f^{(2m)}(x) \geq 0$. On a $| B_{2m}(\{x\}) | \leq | B_{2m} |$ d'après ?. Par suite

$$\begin{aligned} | R_{2m} | &\leq \frac{| B_{2m} |}{(2m)!}\int_a^b | f^{(2m)}(x) | \, dx \\ &= \frac{| B_{2m} |}{(2m)!}\Big[f^{(2m-1)}(b) - f^{(2m-1)}(a)\Big]. \end{aligned}$$

CQFD

Lemme. *Si $f^{(2m+2)}(x) \geq 0$ alors on a $(-1)^m R_{2m} \geq 0$.*

Preuve: Étant donné que la fonction $f^{(2m+1)}(x)$ est croissante, on a

$$(-1)^m(R_{2m} - R_{2m+2}) = \Big[f^{(2m+1)}(b) - f^{(2m+1)}(a)\Big]\frac{(-1)^m B_{2m+2}}{(2m+2)!} \geq 0,$$

car on a $(-1)^m B_{2m+2} \geq 0$. Par suite,

$$\begin{aligned} (-1)^m R_{2m} &= (-1)^m(R_{2m} - R_{2m+2}) + (-1)^{m+1}R_{2m+2} \\ &= | R_{2m} - R_{2m+2} | + (-1)^{m+1}R_{2m+2} \\ &\geq | R_{2m} - R_{2m+2} | - | R_{2m+2} | \geq 0 \end{aligned}$$

car on a $| R_{2m} - R_{2m+2} | \geq | R_{2m+2} |$ d'après la proposition précédente. CQFD

Proposition. *Si $f^{(2m+2)}(x) \geq 0$ et $f^{(2m+4)}(x) \geq 0$ pour $x \in [a, b]$, alors le reste R_{2m} se situe entre 0 et le premier terme négligé dans la formule sommatoire. Autrement dit, on a*

$$R_{2m} = \theta\Big[f^{(2m+1)}(b) - f^{(2m+1)}(a)\Big]\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}$$

pour une quantité $\theta \in [0,1]$.

Preuve: D'après le lemme on a $(-1)^m R_{2m} \geq 0$ et $(-1)^{m+1} R_{2m+2} \geq 0$. Dans ce cas, les quantités R_{2m} et R_{2m+2} sont de signe contraire. Cela suffit pour montrer que R_{2m} se situe entre 0 et $R_{2m} - R_{2m+2}$. CQFD

La formule sommatoire est souvent utilisée dans les développements asymptotiques. Dans ce cas il faut supposer que que l'intégrale

$$R_{2m}(n) = -\int_a^n f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(\{x\})}{(2m)!} dx$$

converge vers une limite lorsque $n \to \infty$. On peut alors donner à la formule sommatoire la forme suivante

$$\sum_{i=a}^{n} f(i) = \int_a^n f(x)dx + \frac{f(n)}{2} \quad + C + \sum_{i=2}^{2m} f^{(2i-1)}(n) \frac{B_{2i}}{(2i)!} \quad + \quad R'_{2m}(n)$$

pour une constante C indépendante de n et un reste

$$R'_{2m}(n) = \int_n^\infty f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(\{x\})}{k!} dx$$

qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. La proposition suivante se démontre comme la précédente.

Proposition.

(i) Si la fonction $f^{(2m)}(x)$ ne change pas de signe pour $x \geq n$ alors le reste $R'_{2m}(n)$ est inférieur en valeur absolu au dernier terme utilisé dans la formule sommatoire.

(ii) Si $f^{(2m+2)}(x) \geq 0$ et $f^{(2m+4)}(x) \geq 0$ pour $x \geq n$, alors le reste $R'_{2m}(n)$ se situe entre 0 et le premier terme négligé dans la formule sommatoire. Autrement dit, on a

$$R'_{2m}(n) = \theta \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+1)}(n).$$

avec $\theta \in [0,1]$.

Comme exemple de développement asymptotique, prenons $f(x) = \log x$. Dans ce cas, on a

$$f^{(i)}(x) = (-1)^{i-1}(i-1)!\, x^{-i} \quad \text{pour} \quad i \geq 1.$$

Remarquons que $f^{(i)}(x) \leq 0$ si i est pair. Quitte à remplacer $f(x)$ par $-f(x)$, on obtient que

$$\log n! = n \log n - n + \frac{\log n}{2} + C + \sum_{i=1}^{m} \frac{B_{2i}}{2i(2i-1)n^{2i-1}} \quad + \theta \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)n^{2m+1}}$$

pour une quantité $\theta \in [0,1]$. Nous avons trouvé plus haut que $C = \log \sqrt{2\pi}$. Cela donne le *développement assymtotique de Stirling*

$$\log n! \sim \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{2i}}{2i(2i-1)} \frac{1}{n^{2i-1}}.$$

On en tire que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{B_{2i}}{2i(2i-1)} \frac{1}{n^{2i-1}}\right)$$

Ce développement asymptotique est d'une précision remarquable. Voici quelques exemples. Posons

$$F_m(n) = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{B_{2i}}{2i(2i-1)}\frac{1}{n^{2i-1}}\right)$$

On a $10! = 3628800$. On trouve

$$\begin{aligned}
F_0(10) &= 3598695.6\\
F_1(10) &= 3628810.0\\
F_2(10) &= 3628799.9\\
F_3(10) &= 3628800.0
\end{aligned}$$

En général, on a

$$F_{2k}(n) \leq n! \leq F_{2k+1}(n)$$

Comme $n!$ est un entier, il suffit que lińéglité $F_{2k+1}(n) - F_{2k}(n) < 1$ soit satisfaite pour déterminer la valeur de $n!$. Par exemple, on trouve

$$\begin{aligned}
F_0(50) &= 30363445939381558207983726752112093959052599802286296951906806786.8\\
F_1(50) &= 30414093877504904385484213362921925582053054825088205037572487646.5\\
F_2(50) &= 30414093201636159061694647318907643264998605961080430356306202218.8\\
F_3(50) &= 30414093201713401203159218189085235433649915858843930525393917857.6\\
&\dots\\
F_{24}(50) &= 30414093201713378043612608166064768844377641568960511999999999488.4\\
F_{25}(50) &= 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000012.6\\
F_{26}(50) &= 30414093201713378043612608166064768844377641568960511999999999999.6\\
F_{27}(50) &= 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000.0
\end{aligned}$$

Cela montre quw

$$50! = 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000.$$

Toutefois, si n est grand (par exemple si $n > 1000$) la différence $F_{2k+1}(n) - F_{2k}(n)$ reste supérieure à 1 pour toute valeur de k. Remarquons ici que $n!$ est un multiple d'une grande puissance de 10 que l'on peut déterminer facilement, Par exemple, $50!$ est un multiple de 10^{12} car

$$12 = \left[\frac{50}{5}\right] + \left[\frac{50}{5^2}\right] = 10 + 2.$$

On trouve que

$$\begin{aligned}
10^{-12}F_{18}(50) &= 30414093201713378043612608166064768844377641568960497.6\\
10^{-12}F_{19}(50) &= 30414093201713378043612608166064768844377641568960512.2\\
10^{-12}F_{20}(50) &= 30414093201713378043612608166064768844377641568960511.9
\end{aligned}$$

On constate que $50!/10^{12}$ est bien égal à la partie entière de $10^{-12}F_{19}(50)$.

Comme autre exemple d'application de la formule sommatoire nous allons montrer que la fonction zèta

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

possède un prolongement analytique à tout le plan complexe sauf en $s = 1$. Si $f(x) = x^{-s}$, on a

$$f^{(i)}(x) = (-1)^i s(s+1)\cdots(s+i-1)x^{-s-i}.$$

Posons $s^{[i]} = s(s+1)\cdots(s+i-1)$ avec $s^{[0]} = 1$. Si $a = 1$ et $b = \infty$, la formule sommatoire nous donne

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \frac{B_i}{i!} s^{[i-1]} - s^{[k]} \int_1^\infty \frac{B_k(\{x\})}{x^{s+k}} dx.$$

En multipliant cette égalité par $(s-1)$ et en utilisant $(s-1)s^{[i-1]} = (s-1)^{[i]}$, on obtient que

$$(s-1)\zeta(s) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (s-1)^{[i]} \frac{B_i}{i!} - (s-1)^{[k+1]} \int_1^\infty \frac{B_k(\{x\})}{x^{s+k}} dx.$$

Le reste R_k est donné par une intégrale qui converge pour toute valeur de s dont la partie réelle est $> 1-k$. Comme k peut être choisie aussi grand que l'on veut, cela montre que la fonction $(s-1)\zeta(s)$ possède un prolongement analytique dans tout le plan. Si $s = (1-n)$ on a $(s-1)^{[i]} = (-1)^i n(n-1)\cdots(n-i+1)$; de plus, $(s-1)^{[k]} = 0$ si $0 < n < k$. On obtient alors que

$$-n\zeta(1-n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i = B_n(1).$$

On a $B_1(1) = -B_1$ et $B_n(1) = B_n$ si $n > 1$. Cela montre que $\zeta(0) = B_1$ et que

$$\zeta(1-2n) = \frac{-B_{2n}}{2n}$$

pour $n = 1, 2, \cdots$. On voit de plus que $\zeta(-2n) = 0$ pour $n = 1, 2, \cdots$.

§ **Exercices**

Exercice: Établir le développement asymptotique

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k\, n^{2k}}.$$

Utiliser le développement pour calculer la constante d'Euler γ à 20 décimales.

§ 4 Aspects arithmétiques.

Les nombres de Bernoulli sont rationnels. On peut les factoriser en facteurs premiers. On trouve

$$
\begin{aligned}
B_0 &= 1\\
-B_1 &= \frac{1}{2}\\
B_2 &= \frac{1}{2\cdot 3}\\
-B_4 &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}\\
B_6 &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 7}\\
-B_8 &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}\\
B_{10} &= \frac{5}{2\cdot 3\cdot 11}\\
-B_{12} &= \frac{691}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13}\\
B_{14} &= \frac{7}{2\cdot 3}\\
-B_{16} &= \frac{3617}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 17}\\
B_{18} &= \frac{43867}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 19}\\
-B_{20} &= \frac{283\cdot 617}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 11}\\
B_{22} &= \frac{11\cdot 131\cdot 593}{2\cdot 3\cdot 23}\\
-B_{24} &= \frac{103\cdot 2294797}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13}\\
B_{26} &= \frac{13\cdot 657931}{2\cdot 3}\\
-B_{28} &= \frac{7\cdot 362903\cdot 9349}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 29}\\
B_{30} &= \frac{5\cdot 1721\cdot 1001259881}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 31}\\
-B_{32} &= \frac{37\cdot 683\cdot 305065927}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 17}
\end{aligned}
$$

On voit que les dénominateurs obéissent à des régularités stupéfiantes! On voit en premier lieu qu'ils sont tous pairs sauf le premier, et qu'ils sont tous divisibles par 3 sauf les deux premiers. On voit ensuite que les dénominateurs de $B_4, B_8, B_{12}, \ldots$ sont tous divisibles par 5, et que les dénominateurs de $B_6, B_{12}, B_{18}, \ldots$ sont divisibles par 7. On est conduit à conjecturer qu'un nombre premier p divise les dénominateurs de tous nombres de Bernoulli $B_{p-1}, B_{2(p-1)}, B_{3(p-1)}, \ldots$ et seulement ceux-là. Et de plus que p^2 ne divise aucun de ces dénominateurs. Cela donne une règle pour calculer le dénominateur de B_{2n}. On commence par faire la liste des diviseurs de $2n$ augementés d'une unité; on élimine ensuite de cette liste tous les nombres qui ne sont pas premiers; le dénominateur de B_{2n} est alors le produit des èlements restants. Par exemple, les diviseurs de 10 augmentés d'une unité sont $2, 3, 6$ et 11. Les nombres premiers parmi cette liste sont $2, 3$ et 11. Le dénominateur de B_{10} est donc $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$. Formellement, le dénominateur D_{2n} de B_{2n} est donné par le produit

$$D_{2n} = \prod_{p-1|2n,\, p\,\text{premier}} p$$

Un résultat encore plus précis a été obtenu indépendamment par von Staudt et Clausen en 1840:

Théorème. (von Staudt) *La somme*

$$B_{2n} + \sum_{p-1|2n,\, p \,\text{premier}} \frac{1}{p}$$

est un nombre entier.

Par exemple,

$$\begin{aligned}
B_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= 1 \\
B_4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} &= 1 \\
B_6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} &= 1 \\
B_8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} &= 1 \\
B_{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11} &= 1 \\
B_{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} &= 1 \\
B_{14} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= 2 \\
B_{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{17} &= -6 \\
B_{18} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{19} &= 56 \\
B_{20} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11} &= -528 \\
B_{22} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{23} &= 6193 \\
B_{24} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} &= -86579
\end{aligned}$$

Pour démontrer le théorème de von Staudt nous utiliserons une formule de Lucas qui exprime les nombres de Bernoulli en fonction des nombres de Stirling. La formule peut s'obtenir de l'application d'une méthode de Fermat permettant d'obtenir un polynôme donnant la somme des puissances des entiers successifs. La méthode de Fermat est basée sur les propriétés du polynôme

$$x_{[k]} = x(x-1)\cdots(x-k+1).$$

Nous dirons que $x_{[k]}$ est la k-ième puissance *descendante* de x (c'est le produit de k nombres $x, x-1, \ldots, x-k+1$). On retrouve ces puissances dans le coefficient du binôme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n_{[k]}}{k!}.$$

On définit aussi la k-ième puissance *montante* ou *factorielle* de x en posant

$$x^{[k]} = x(x+1)\cdots(x+k-1).$$

Par exemple,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{[k]} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k}.$$

Les puissances montantes et descendantes sont liées par l'identité:

$$(-x)^{[k]} = (-1)^k x_{[k]}.$$

Pour toute fonction $f(x)$, posons $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Fermat observe que l'on a que

$$\Delta x_{[k]} = k\, x_{[k-1]}.$$

En effet,

$$(x+1)_{[k]} - x_{[k]} = (x+1)x_{[k-1]} - x_{[k-1]}(x-k+1) = kx_{[k-1]}.$$

On trouve de même que

$$\Delta x^{[k]} = k(x+1)^{[k-1]}.$$

On en déduit par somme télescopique que l'on a

$$1^{[k]} + 2^{[k]} + \cdots + n^{[k]} = \frac{n^{[k+1]}}{k+1}.$$

Par exemple,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Remarquer que $n^2 = n^{[2]} - n^{[1]}$. On en déduit que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} n^{[2]} - \sum_{i=1}^{n} n^{[1]} = \frac{n^{[3]}}{3} - \frac{n^{[2]}}{2}.$$

De même, pour trouver la somme des cubes, il suffit de trouver des coefficients a et b et c de sorte que

$$n^3 = a \cdot n^{[3]} + b \cdot n^{[2]} + c \cdot n^{[1]}.$$

Car alors

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = a \cdot \frac{n^{[4]}}{4} + b \cdot \frac{n^{[3]}}{3} + c \cdot \frac{n^{[2]}}{2}.$$

Pour trouver a, b et c, on peut procéder comme suit. Comme on a

$$n^{[3]} = n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n,$$

on a $n^3 = n^{\overline{3}} - 3n^2 - 2n$. Mais on sait déjà que $n^2 = n^{[2]} - n$. Par suite,

$$n^3 = n^{[3]} - 3\big(n^{[2]} - n\big) - 2n = n^{[3]} - 3n^{[2]} + n^{[1]}.$$

Un raisonnement par récurrence montre qu'en général, on peut exprimer la puissance ordinaire x^n en fonction des puissances montantes $x^{[n]}, \ldots, x^{[1]}$. On trouve que

$$\begin{aligned}
x^1 &= x^{[1]} \\
x^2 &= x^{[2]} - x^{[1]} \\
x^3 &= x^{[3]} - 3\,x^{[2]} + x^{[1]} \\
x^4 &= x^{[4]} - 6\,x^{[3]} + 7\,x^{[2]} - x^{[1]} \\
x^5 &= x^{[5]} - 10\,x^{[4]} + 25\,x^{[3]} - 15\,x^{[2]} + x^{[1]} \\
x^6 &= x^{[6]} - 15\,x^{[5]} + 65\,x^{[4]} - 90\,x^{[3]} + 31\,x^{[2]} - x^{[1]} \\
x^7 &= x^{[7]} - 21\,x^{[6]} + 140\,x^{[5]} - 350\,x^{[4]} + 301\,x^{[3]} - 63\,x^{[2]} + x^{[1]} \\
x^8 &= x^{[8]} - 28\,x^{[7]} + 266\,x^{[6]} - 1050\,x^{[5]} + 1701\,x^{[4]} - 966\,x^{[3]} + 127\,x^{[2]} - x^{[1]} \\
x^9 &= x^{[9]} - 36\,x^{[8]} + 462\,x^{[7]} - 2646\,x^{[6]} + 6951\,x^{[5]} - 7770\,x^{[4]} + 3025\,x^{[3]} - 255\,x^{[2]} + x^{[1]}.
\end{aligned}$$

En général, on a

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}'' x^{[k]}$$

pour certains coefficients $\binom{n}{k}''$. Si on remplace x par $-x$ dans cette formule on obtient une formule sans signe qui exprime x^n en fonction des puissances descendantes de x:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}'' x_{[k]}.$$

Les coefficients $\binom{n}{k}''$ furent étudiés par James Stirling (1692-1770) et on dit que ce sont les *nombres de Stirling de seconde espèce*. On définit aussi des nombres de *première espèce* comme les coefficients du polynôme

$$x^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}' x^k.$$

Nous n'utiliserons pas les nombres de Stirling de première espèce. La relation $x \cdot x_{[k]} = x_{[k+1]} + k \cdot x_{[k]}$ entraîne que l'on a

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}'' x \cdot x_{[k]} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}'' x_{[k+1]} + \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}'' x_{[k]} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1}'' + k \binom{n}{k}'' \right] x_{[k]}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\binom{n}{k}'' = \binom{n}{k-1}'' + k \binom{n}{k}''.$$

Jointes aux conditions $\binom{n}{n}'' = 1$, et $\binom{n}{0}'' = 0$ pour $n > 0$, Cette relation permet de calculer $\binom{n}{k}''$ par récurrence sur n.

Nous pouvons maintenant formuler le résultat général que l'on obtient par la méthode de Fermat:

Proposition. *Pour tout entiers $n \geq 1$ et $p \geq 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p}{i-1}'' \frac{n_{[i]}}{i}$$

Preuve: Partons de l'identité

$$k^p = \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p}{i-1}'' k_{[i-1]}.$$

On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p}{i-1}'' k_{[i-1]} = \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p}{i-1}'' \sum_{k=0}^{n-1} k_{[i-1]}.$$

La relation $\Delta x_{[i]} = (i)\, x_{[i-1]}$ entraîne par somme télescopique que l'on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} k_{[i-1]} = \frac{n_{[i]} - 0_{[i]}}{i} = \frac{n_{[i]}}{i},$$

car $i > 0$. Par suite,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p}{i-1}'' \frac{n_{[i]}}{i}.$$

CQFD

Proposition. *Pour tout entier $p \geq 0$, on a*

$$B_p(x) = \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p}{i-1}'' \frac{d}{dx} \frac{x_{[i]}}{i}$$

Preuve: Il suit de la proposition ? et de la proposition ? que

$$\int_0^n B_p(t)dt = \frac{B_{p+1}(n) - B_p(0)}{p+1} = \sum_{k=0}^{n-1} k^p.$$

Par suite

$$\int_0^n B_p(t)dt = \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p}{i-1}'' \frac{n_{[i]}}{i}.$$

Comme les deux membres de cette égalité sont des polynômes dans la varible n, on peut remplacer cette variable par x:

$$\int_0^x B_p(t)dt = \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p}{i-1}'' \frac{x_{[i]}}{i}.$$

Le résultat s'obtient en prenant ensuite la dérivé par rapport à x. CQFD

Corollaire. *(Lucas) On a*

$$B_n = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \binom{n}{i-1}'' \frac{(i-1)!}{i}$$

Preuve: En effet,

$$B_p(0) = \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p}{i-1}'' \frac{d}{dx} \frac{x_{[i]}}{i} \ |_{x=0} \ .$$

Le polynôme $x_{[i]}$ s'annulle en $x = 0$, puisque $i > 0$. La valeur de sa dérivé en $x = 0$ est donnée par

$$\frac{x_{[i]}}{x} \ |_{x=0} = (-1) \cdot (-2) \cdot \cdots \cdot (-i+1) = (-1)^{i-1}(i-1)!.$$

CQFD

Désignons par D l'opérateur de dérivation, $D(f(x)) = f'(x)$. On voit facilement par récurrence sur n que l'on a $D^n(x^a) = a^{\underline{n}} x^{a-k}$. Désignons par xD l'opérateur de dérivation suivi d'une multiplication par x: $(xD)(f) = xf'(x)$. On voit facilement par récurrence sur n que l'on a $(xD)^n(x^a) = a^n x^a$. Remarquer que

$$\begin{aligned} & (xD)^2(f) = xD(xf') = x(xf')' = xf' + x^2 f'' \\ \text{et} \quad & (xD)^3(f) = xD(xf' + x^2 f'') = xf' + 3x^2 f'' + x^3 f'''. \end{aligned}$$

Symboliquement, cela montre que $(xD)^2 = xD + x^2D^2$ et $(xD)^3 = xD + 3\,x^2D^2 + x^3D^3$. On trouve que

$$\begin{aligned}
(xD)^1 &= xD,\\
(xD)^2 &= xD + x^2D^2,\\
(xD)^3 &= xD + 3\,x^2D^2 + x^3D^3,\\
(xD)^4 &= xD + 7\,x^2D^2 + 6\,x^3D^3 + x^4D^4,\\
(xD)^5 &= xD + 15\,x^2D^2 + 25\,x^3D^3 + 10\,x^4D^4 + x^5D^5.
\end{aligned}$$

On voit que les nombres de Stirling de deuxième espèce apparaissent dans le développement des puissances de l'opérateur xD. On vérifie facilement par récurrence sur n que l'on a

$$(xD)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}'' x^kD^k \qquad ?.$$

Par exemple, si on applique $(xD)^n$ à la fonction $f(x) = x^a$, on retrouve l'identité

$$a^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}'' a^{\underline{k}}.$$

Si on l'applique à la fonction $f(x) = e^x$, on obtient que

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{x^k}{k!} = e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}'' x^k.$$

Proposition. *On a*

$$\binom{n}{k}'' = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

Preuve: Les caculs précédents montrent que l'on a

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}'' x^k = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{x^k}{k!}.$$

L'entier n étant fixé posons $a_k = k!\binom{n}{k}''$ pour tout $k \geq 0$. Avec cette notation, l'égalité précédente devient

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{x^k}{k!}.$$

Par suite,

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i^n.$$

CQFD

La dernière proposition montre en particulier que l'on a

$$\begin{aligned}
2!\binom{n}{2}'' &= 2^n - 2 + 0^n,\\
3!\binom{n}{3}'' &= 3^n - 3\cdot 2^n + 3 - 0^n,\\
4!\binom{n}{4}'' &= 4^n - 4\cdot 3^n + 6\cdot 2^n - 4 + 0^n
\end{aligned}$$

pour tout $n \geq 0$.

Lemme. *Si $n > 0$ et p est un nombre premier, alors on a*

$$\binom{n}{p-1}'' \equiv \begin{cases} 1 \text{ modulo } p & \text{si } p-1 \text{ divise } n, \\ 0 \text{ modulo } p & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve: Montrons d'abord que la classe de congruence modulo p de l'entier $\binom{n}{p-1}''$ ne dépend que de la classe de congruence modulo $p-1$ de n. Comme $(p-1)!$ est inversible modulo p, il est équivalent de montrer que la classe de congruence modulo p de l'entier $(p-1)!\binom{n}{p-1}''$ ne dépend que de la classe de congruence modulo $p-1$ de n. D'après la proposition ?, on a

$$(p-1)!\binom{n}{p-1}'' = \sum_{i=0}^{p} \binom{p-1}{i} i^n (-1)^{p-i-1}.$$

Mais on a $0^n = 0$ puisque $n > 0$. Par suite,

$$(p-1)!\binom{n}{p-1}'' = \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p-1}{i} i^n (-1)^{p-i-1}.$$

D'aprés Fermat, si p ne divise pas un entier a alors $a^{p-1} \equiv 1$ modulo p. On en déduit que si $m \equiv n$ modulo $p-1$, alors $a^m \equiv a^n$ modulo p. Autrement dit, la classe de congruence modulo p de a^n ne dépend que de la classe de congruence modulo $p-1$ de n. En particulier, si $0 < i < p$, la classe de congruence modulo p de i^n ne dépend que de la classe de congruence modulo $p-1$ de n. Cela démontre le résultat cherché. Supposons maintenant que $p-1$ divise n. Dans ce cas, on a $n \equiv p-1$ modulo $p-1$. Par suite,

$$\binom{n}{p-1}'' \equiv \binom{p-1}{p-1}'' = 1 \qquad \text{mod} \quad p.$$

Supposons maintenant que $p-1$ ne divise pas n. Si $0 < r < p-1$ est le reste de la division de n par $p-1$ alors on a $n \equiv r$ modulo $p-1$; par suite,

$$\binom{n}{p-1}'' \equiv \binom{r}{p-1}'' = 0 \qquad \text{mod} \quad p.$$

CQFD

La preuve du lemme suivant utilise le théorème de Wilson: si p est un nombre premier alors $(p-1)! \equiv -1$ nodulo p. Remarquons que si n n'est pas premier alors $n \mid (n-1)!$, sauf si $n = 4$.

Lemme. *Si $k, n > 0$, alors*

$$(k-1)!\binom{2n}{k-1}'' \equiv \begin{cases} -1 \text{ modulo } k & \text{si } k \text{ est premier et } k-1 \mid 2n, \\ 0 \text{ modulo } k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve: Si k est premier alors, d'après le lemme précédent et le théorème de Wilson, on a

$$(k-1)!\binom{n}{k-1}'' \equiv \begin{cases} -1 \text{ modulo } k & \text{si } k-1 \text{ divise } 2n, \\ 0 \text{ modulo } k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $k \neq 4$ n'est pas premier, on a $k \mid (k-1)!$, et par suite

$$(k-1)!\binom{n}{k-1}'' \equiv 0 \text{ modulo } k.$$

Si $k=4$ alors on a

$$3!\binom{2n}{3}'' = 3^{2n} - 3\cdot 4^n + 3 \equiv 3^{2n} + 3 \equiv (-1)^{2n} + (-1) \equiv 0 \quad \text{modulo} \quad 4.$$

CQFD

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de von Staudt. Nous utiliserons la formule de Lucas:

$$B_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k-1}'' \frac{(k-1)!}{k}.$$

D'après le lemme ? on a

$$(-1)^{k-1}\binom{2n}{k}'' \frac{(k-1)!}{k} \equiv \begin{cases} \frac{(-1)^k}{k} \ \text{modulo}\ 1 & \text{si } k \text{ est premier et } k-1 \mid 2n \\ 0 \ \text{modulo}\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais on a

$$\frac{(-1)^k}{k} \equiv \frac{-1}{k} \ \text{modulo}\ 1$$

si $k=2$ ou bien si k est impair. Par suite,

$$B_{2n} \equiv \sum_{p-1|2n} \frac{-1}{p} \ \text{modulo}\ 1.$$

Le théorème de von Staudt est démontré.

On définit les *nombres de Genocchi* G_n par la série génératrice

$$G(x) = \frac{2x}{e^x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{x^n}{n!}$$

Nous verrons qu'ils sont entiers. Ces nombres ont été étudiés par Euler et principalement par Angelo Genocchi (1817-1889). On trouve

$$G(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - 3\frac{x^6}{6!} + 17\frac{x^8}{8!} - 155\frac{x^{10}}{10!} + 2073\frac{x^{12}}{12!} - 38227\frac{x^{14}}{14!} + 929569\frac{x^{16}}{16!} - \cdots.$$

Remarquons l'identité

$$G(x) = \frac{2x}{e^x+1} = x - x\frac{e^x-1}{e^x+1} = x - x\tanh\left(\frac{x}{2}\right).$$

Elle montre que $G_1 = 1$ et que $G_{2n+1} = 0$ pour $n > 0$. Elle montre aussi que

$$x\tanh\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} -G_{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Mais d'après la proposition ?, on a

$$x\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2(2^{2n}-1)B_{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Par suite,

$$G_{2n} = -2(2^{2n}-1)B_{2n} \quad \text{pour} \quad n > 0.$$

On en déduit que $(-1)^n G_{2n} > 0$.

Théorème. (Genocchi) *Les nombres G_{2n} sont des entiers impairs.*

Preuve: On a $\mid G_{2n} \mid = 2(2^{2n}-1) \mid B_{2n} \mid$. Il suffit donc de montrer que le dénominateur de B_{2n} divise $2(2^{2n}-1)$. Par le théorème de von Staudt il suffit de montrer si $p-1$ divise $2n$ et p est premier, alors p divise $2(2^{2n}-1)$. C'est clair si $p=2$. Supposons p impair. Dans ce cas, p divise $2^{p-1}-1$ par le théorème de Fermat. Mais si a divise b alors 2^a-1 divise 2^b-1. Donc $2^{p-1}-1$ divise $2^{2n}-1$ puisque $p-1$ divise $2n$. Cela entraîne que p divise $2n$. De plus, G_{2n} est impair puisque le dénominateur de B_{2n} est pair. CQFD

Remarque: Signalons ici que l'on peut donner aux nombres de Genocchi plusieurs interprétations combinatoires [S]. Par exemple, $\mid G_{2n} \mid$ est le nombre de permutations $a_1, \ldots, a_{2n-1}$ de $1, 2, \ldots, 2n-1$ avec une montée $a_i < a_{i+1}$ si a_i est impair et une descente $a_i > a_{i+1}$ si a_i est pair. Par exemple, si $2n = 6$, on trouve trois permutations de ce type: 42135, 21435 et 34215.

§ **Exercices**

Exercice: Montrer que

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2n-1) \cdot (2n+1) = \frac{(2n+3)(2n+1)(2n-1)+3}{6}.$$

Suggestion:

Les puissances descendantes et montantes figurent dans le *binôme de Newton*:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} a_{[n]} \frac{x^n}{n!} \qquad \frac{1}{(1-x)^a} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{[n]} \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice: Établir les identités

$$(a+b)_{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{[k]}\, b_{[n-k]} \quad \text{et} \quad (a+b)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{[k]}\, b^{[n-k]}.$$

Suggestion: Utiliser l'identité $(1+x)^{a+b} = (1+x)^a(1+x)^b$.

Exercice: Montrer que si q est premier et $2q+1$ est composé, alors le dénominateur de B_{2q} est égal à 6.

Exercice: Montrer que si q est un nombre premier de la forme $3n+1$, alors le dénominateur de B_{2q} est égal à 6.

Exercice: Dans tous les exemples de nombre de Bernoulli considérés dans ces notes, on peut observer que si un nombre premier p divise $2n$ et que $p-1$ ne divise pas $2n$, alors p divise le numérateur de B_{2n}. Par exemple, le numérateur de

$$B_{10} = \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 11}$$

est divisible par 5. Cette propriété est-elle vraie pour tout les nombres de Bernoulli ? Pourriez-vous la démontrer?

Exercice: Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\frac{\mid G_{2n} \mid}{4} \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \cdots ..$$

Suggestion Utiliser la formule

$$\big(1 - \frac{1}{2^s}\big)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots ..$$

Exprimer les nombres de Genocchi en fonction des nombres de Bernoulli.

§2 Série de Taylor des fonctions trigonométriques.

Il y a 6 fonctions trigonométriques de base:

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \tan x, \quad \cot x, \quad \sec x, \quad \operatorname{cosec} x$$

Nous avons vu que les coefficients de Taylor de $\cot x$ s'expriment en terme des nombres de Bernoulli. Nous allons voir que c'es aussi le cas des fonctions $\tan x$, $\sec x$ et $\operatorname{cosec} x$.

Nous avons vu que

$$\frac{x}{2} \coth\Big(\frac{x}{2}\Big) = \frac{x}{2} + B(x).$$

Par suite, $x \coth x = x + B(2x)$.

Lemme. *On a*

$$x \operatorname{cosech}(x) = 2B(x) - B(2x) \qquad \text{et} \quad x \tanh(x) = B(4x) - B(2x) + x.$$

Preuve: Remarquons d'abord que

$$\operatorname{cosech}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}.$$

Si on substitue $a = e^x$ dans l'identité

$$\frac{2a}{a^2 - 1} = \frac{a+1}{a-1} - \frac{a^2+1}{a^2-1},$$

on obtient que

$$\frac{2e^x}{e^{2x} - 1} = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1},$$

et par suite que

$$\frac{2xe^x}{e^{2x} - 1} = 2\frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - x\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = 2\Big(B(x) + \frac{x}{2}\Big) - \Big(B(2x) + x\Big) = 2B(x) - B(2x)\,.$$

La première identité est démontrée. Pour démontrer la seconde, remarquons d'abord que

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Si on substitue $a = e^{2x}$ dans l'identité

$$\frac{a-1}{a+1} = 2\,\frac{a^2+1}{a^2-1} - \frac{a+1}{a-1},$$

on obtient que

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 2\,\frac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1} - \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1},$$

et par suite que

$$x\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 2x\,\frac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1} - x\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \Big(B(4x)+2x\Big) - \Big(B(2x)+x\Big) = B(4x) - B(2x) + x.$$

CQFD

Proposition. *On a*

$$x\,\mathrm{cosech}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2-2^{2n})B_{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$x\,\mathrm{cosec}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(2^{2n}-2)\mid B_{2n}\mid \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$x\tanh(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{4n}-2^{2n})B_{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$x\,\tan(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{4n}-2^{2n})\mid B_{2n}\mid \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Preuve: Le premier développement s'obtient de l'identité $x\,\mathrm{cosech}(x) = 2B(x) - B(2x)$. Le second en remplacant x par ix dans le premier. Les deux autres développements s'obtiennent d'une manière semblable. CQFD

Proposition . *On a*

$$-x\,\mathrm{sech}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}4^{2n+1}B_{2n+1}\Big(\frac{1}{4}\Big)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

et

$$-\,x\,\sec(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n4^{2n+1}B_{2n+1}\Big(\frac{1}{4}\Big)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Preuve: Remarquer que

$$\mathrm{sech}(x) = \frac{2}{e^x+e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}.$$

Si on substitue $a = e^x$ dans l'identité

$$\frac{a}{1+a^2} = \frac{a}{1-a^4} - \frac{a^3}{1-a^4} = \frac{a}{1-a^4} + \frac{a^{-1}}{1-a^{-4}},$$

on obtient que

$$\frac{e^x}{e^{2x}+1} = \frac{e^x}{1-e^{4x}} + \frac{e^{-x}}{1-e^{-4x}},$$

et par suite que

$$-x\,\mathrm{sech}(x) = \frac{1}{2}\Big[B(4x)e^x - B(-4x)e^{-x}\Big].$$

Cela montre que la fonction $-x\,\mathrm{sech}(x)$ est égale à la partie impaire de la fonction $B(4x)e^x$. Par suite,

$$-x\,\mathrm{sech}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}\Big(\frac{1}{4}\Big)\frac{(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Si on remplace x par ix dans ce développement, on obtient le développement,

$$x\ \sec(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}B_{2n+1}\Big(\frac{1}{4}\Big)\frac{(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Cela donne le résultat cherché car les nombres sécants sont ≥ 0. CQFD

Les coefficients de Taylor des fonctions $\tan x$ et $\sec x$ méritent une attention spéciale. On trouve que

$$\tan x = x + 2\frac{x^3}{3!} + 16\frac{x^5}{5!} + 272\frac{x^7}{7!} + 7936\frac{x^9}{9!} + 353792\frac{x^{11}}{11!} + 22368256\frac{x^{13}}{13!} + \cdots.$$

$$\sec(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + 5\frac{x^4}{4!} + 61\frac{x^6}{6!} + 1385\frac{x^8}{8!} + 50521\frac{x^{10}}{10!} + 2702765\frac{x^{12}}{12!} + \cdots.$$

Ces coefficients sont des entiers positifs ! (ou nuls). On peut leur donner une interprétation combinatoire. Posons

$$A(x) = \tan x + \sec x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}.$$

On dit que A_{2n+1} est un *nombre tangent* et que A_{2n} est un *nombre sécant.* Nous commencerons par montrer que ce sont des entiers. Remarquons que si deux séries de Taylor $f(x)$ et $g(x)$ ont des coefficients entiers, il en est de même de leur somme $f(x)+g(x)$ et de leur produit $f(x)g(x)$.

Lemme. *Si une série de Taylor $f(x)$ a des coefficients entiers et si $f(0)=1$, alors la série inverse $f(x)^{-1}$ a des coefficients entiers.*

Preuve: Si

$$f(x) = 1 + a_1x + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \text{et} \quad f(x)^{-1} = 1 + b_1x + b_2\frac{x^2}{2!} + b_3\frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

alors la condition $f(x)f(x)^{-1} = 1$ signifie que l'on a

$$\begin{aligned}
0 &= a_1 + b_1\\
0 &= a_2 + 2a_1b_1 + b_2\\
0 &= a_3 + 3a_2b_1 + 3a_1b_2 + b_3\\
&\cdots
\end{aligned}$$

Par suite,

$$b_n = -\left[\binom{n}{1}b_{n-1}a_1 + \binom{n}{2}b_{n-2}a_2 + \cdots + \binom{n}{n-1}b_1a_{n-1} + a_n\right].$$

Cette formule permet de calculer b_n en fonction $b_1, \ldots, b_{n-1}$. Elle montre que le coefficient b_n est entier si les coefficients $b_1, \ldots, b_{n-1}$ sont entiers. Le résultat s'obtient en raisonnant par induction. CQFD

Le lemme montre que les fonctions $\sec x$ et $\tan x$ ont des coefficients de Taylor entiers. De même pour les fonctions $\mathrm{sech} x$ et $\tanh x$. Il reste à montrer que ces entiers sont positifs. Pour cela, remarquons que la fonction $A(x) = \tan x + \sec x$ satisfait l'équation différentielle:

$$2A'(x) = 1 + A(x)^2.$$

En effet, on a

$$2A'(x) = 2\sec^2 x + 2\tan x \sec x = 1 + \tan^2 x + \sec^2 x + 2\tan x \sec x = 1 + A(x)^2.$$

De l'égalité

$$2\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1}\frac{x^n}{n!} = 1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}\right)^2$$

on tire la relation

$$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k}.$$

C'est une formule de récurrence permettant de calculer le coefficient A_{n+1} en terme des précédents. Elle permet de voir que l'on a $A_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.

Les nombres tangents et sécants ont une interprétation combinatoire intéressante découverte par André (1879). L'entier $2A_n$ est le nombre de *permutations alternantes* (ou *zigzagantes*) de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On dit qu'une permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est *alternante* si l'on a

$$\text{ou bien} \quad a_1 < a_2 > a_3 < \ldots, \quad \text{ou bien} \quad a_1 > a_2 < a_3 > \ldots.$$

Par exemple, les permutations alternantes de $\{1, 2, 3, 4\}$ sont

$$(1324),\ (2314),\ (1423),\ (2413),\ (3412),\ (4231),\ (3241),\ (4132),\ (3142),\ (2143).$$

Nous dirons qu'une permutation alternante $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est *zig* si elle commence par une monté $a_1 < a_2$, et nous dirons qu'elle est *zag* si elle se termine par une descente $a_{n-1} > a_n$ (si n est impair une permutation alternante est *zig* ssi et seulement si elle est *zag*, et c'est le contraire si n est impair). Par exemple, on trouve que les permutations *zigs* de $\{1, 2, 3, 4\}$ sont

$$(1324),\ (2314),\ (1423),\ (2413),\ (3412),$$

alors que les permutations *zags* sont

$$(4231),\ (3241),\ (4132),\ (3142),\ (2143).$$

Le coefficient A_n est le nombre de permutations *zigs* de $\{1, 2, \ldots, n\}$. C'est aussi le nombre de permutations *zags* car les permutations *zigs* et les permutations *zags* sont en nombre égal.

$$
\begin{aligned}
&A_1 : \ (1)\\
&A_2 : \ (12)\\
&A_3 : \ (132), (231)\\
&A_4 : \ (1324), (2314), (1423), (2413), (3412)\\
&A_5 : \begin{cases} (13254), (23154), (14253), (24153), (34152), (14352), (34251), (24351),\\ (45231), (45132), (35241), (35142), (25143), (25341), (15243), (15342) \end{cases}\\
&A_6 : \begin{cases} (132546), (231546), (142536), (241536), (341526), (143526), (342516), (243516),\\ (452316), (451326), (352416), (351426), (251436), (253416), (152436), (153426)\\ (561324), (562314), (561423), (562413), (563412)\\ (461325), (462315), (461523), (462513), (463512)\\ (361425), (362415), (361524), (362514), (364512)\\ (263415), (261435), (263514), (261534), (264531)\\ (163425), (162435), (163524), (162534), (164532)\\ (354612), (453612), (254613), (452613)\\ (253614), (352614), (243615), (342615)\\ (154623), (451623), (153624), (351624)\\ (341625), (143625), (152634), (152634)\\ (142635), (142635), (132645), (231645). \end{cases}
\end{aligned}
$$

En termes combinatoire la relation

$$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k} \quad \text{pour} \quad n \geq 0$$

signifie que toute permutation alternante de longeur $n+1$ se décompose en une paire de permutations alternantes, l'une zig de longeur k et l'autre zag de longueur $n-k$; l'entier $k+1$ indique la position de l'élément maximum dans la permutation. Décrivons cette décomposition dans le cas des permutations de longueur 7. On les classe en 7 types suivant la position de 7:

$$
\begin{aligned}
&T_0 : (7a_1a_2a_3a_4a_5a_6)\\
&T_1 : (a_17a_2a_3a_4a_5a_6)\\
&T_2 : (a_1a_27a_3a_4a_5a_6)\\
&T_3 : (a_1a_2a_37a_4a_5a_6)\\
&T_4 : (a_1a_2a_3a_47a_5a_6)\\
&T_5 : (a_1a_2a_3a_4a_57a_6)\\
&T_6 : (a_1a_2a_3a_4a_5a_67).
\end{aligned}
$$

Le nombre de permutations alternantes de type T_k est égal à $\binom{6}{k} A_k A_{6-k}$. Par exemple, une permutation de type T_3 se décompose en deux permutations alternantes $a_1a_2a_3$ et $a_4a_5a_6$; la première est une permutation *zag* d'un sous-ensemble de trois éléments $\{a_1, a_2, a_3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et la seconde est une permutation *zig* du complémentaire $\{a_4a_5a_6\}$. Il y a $\binom{6}{3}$ sous-ensemble de 3 éléments. Il y a donc $\binom{6}{3} A_3 A_{6-3}$ permutations alternantes de type T_3.

Remarque: Les *nombres d'Euler* E_n sont définis comme les coefficients de Taylor de la sécante hyperbolique

$$\operatorname{sech}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!}.$$

On a $E_{2n+1} = 0$ puisque la sécante hyperbolique est une fonction paire. On a $E_{2n} = (-1)^n A_{2n}$.

Remarque: Il suit des propositions ? et ? que les nombres tangents et sécants s'expriment en terme des nombres de Bernoulli:

$$A_{2n-1} = (2^{4n} - 2^{2n})\frac{\mid B_{2n} \mid}{2n} \quad \text{et} \quad A_{2n} = 4^{2n+1}\frac{\mid B_{2n+1}(\frac{1}{4}) \mid}{2n+1}.$$

Le développement de Taylor de la fonction $x \tan \frac{x}{2}$ peut prendre trois formes. La première en terme des nombres de Bernoulli, la seconde en terme des nombres tangents et la troisième en terme des nombres de Genocchi:

$$x \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2(2^{2n} - 1) \mid B_{2n} \mid \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$x \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA_{2n-1}}{2^{2n-2}} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$x \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mid G_{2n} \mid \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Corollaire. *Le nombre de Genocchi G_{2n} est divisible par le plus grand facteur impair de n.*

Preuve: L'égalité $2^{2n-2} \mid G_{2n} \mid = nA_{2n-1}$ montre que G_{2n} est divisible par le plus grand facteur impair de n. CQFD

Nous dirons que le quotient de G_{2n} par le plus grand facteur impair de n est un nombre de Genocchi *réduit* et nous le dénoterons par $\tilde{G}_{2n}$. Ce nombre est impair puisque G_{2n} est impair.

On trouve que

$$x \tan \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + 3\frac{x^6}{6!} + 17\frac{x^8}{8!} + 31 \cdot 5\frac{x^{10}}{10!} + 691 \cdot 3\frac{x^{12}}{12!} + 5461 \cdot 7\frac{x^{14}}{14!} + \cdots$$

Les premières valeurs de $\mid \tilde{G}_{2n} \mid$ sont le suivantes:

$\mid \tilde{G}_2 \mid$	$\mid \tilde{G}_4 \mid$	$\mid \tilde{G}_6 \mid$	$\mid \tilde{G}_8 \mid$	$\mid \tilde{G}_{10} \mid$	$\mid \tilde{G}_{12} \mid$	$\mid \tilde{G}_{14} \mid$	$\mid \tilde{G}_{16} \mid$	$\mid \tilde{G}_{18} \mid$	$\mid \tilde{G}_{20} \mid$	$\mid \tilde{G}_{22} \mid$
1	1	1	17	31	691	5461	929569	3202291	221930581	4722116521

Désignons par $e_2(n)$ l'exposant de la plus grande puissance de 2 divisant un entier n.

Corollaire. *Le plus grand facteur impair de A_{2n-1} est $\mid \tilde{G}_{2n} \mid$. On a*

$$e_2(A_{2n-1}) = (2n-1) - e_2(2n)$$

Preuve: Si on divise l'égalité $2^{2n-2} \mid G_{2n} \mid = nA_{2n-1}$ par le plus grand facteur impair de n on obtient l'égalité

$$2^{2n-2} \mid \tilde{G}_{2n} \mid = 2^{e_2(n)} A_{2n-1}.$$

Par suite

$$A_{2n-1} = 2^{2n-2-e_2(n)} \mid \tilde{G}_{2n} \mid.$$

Cela démontre le résultat puisque $\tilde{G}_{2n}$ est impair. CQFD

On trouve que

$$\tan x = x + 2^1 \frac{x^3}{3!} + 2^4 \frac{x^5}{5!} + 17 \cdot 2^4 \frac{x^7}{7!} + 31 \cdot 2^8 \frac{x^9}{9!} + 691 \cdot 2^9 \frac{x^{11}}{11!} + 5461 \cdot 2^{12} \frac{x^{13}}{13!} + \cdots .$$

§ **Exercices**

Il est intéressant de calculer les dérivés successives de la fonction $\tan x$. Si D désigne l'opération de dérivation, on trouve

$$\begin{aligned} D^0 \tan &= \tan, \\ D^1 \tan &= \tan^2 + 1, \\ D^2 \tan &= 2\tan^3 + 2\tan, \\ D^3 \tan &= 6\tan^4 + 8\tan^2 + 2, \\ D^4 \tan &= 24\tan^5 + 40\tan^3 + 16\tan \\ &\cdots \end{aligned}$$

Exercice: Montrer par induction qu'il existe une suite de polynômes $T_0(u), T_1(u), \ldots$ pour lesquels on a

$$\frac{d^n}{dx^n} \tan x = T_n(\tan x).$$

Montrer que $T_{n+1}(u) = (u^2+1)T_n'(u)$.

Exercice: Montrer que

$$\frac{u + \tan x}{1 - u\tan x} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(u) \frac{x^n}{n!}.$$

Suggestion: Utiliser la formule de Taylor

$$\tan(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\tan(y)) \frac{x^n}{n!}$$

et l'identité

$$\tan(x+y) = \frac{\tan y + \tan x}{1 - \tan y \, \tan x}.$$

Exercice: Montrer que $\tan\bigl(x + \frac{\pi}{4}\bigr) = \tan 2x + \sec 2x$. En déduire que

$$\tan x + \sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n(1)}{2^n} \frac{x^n}{n!}.$$

Il est intéressant de calculer les dérivés successives de la fonction $\sec(x)$. On trouve

$$\begin{aligned} D^0 \sec &= \sec, \\ D^1 \sec &= \tan \ \sec, \\ D^2 \sec &= (2\tan^2 + 1)\sec, \\ D^3 \sec &= (6\tan^3 + 5\tan)\sec, \\ D^4 \sec &= (24\tan^4 + 28\tan^2 + 5)\sec, \\ &\cdots \end{aligned}$$

Exercice: Montrer par induction qu'il existe une suite de polynômes $S_0(u), S_1(u), \ldots$ pour lesquels on a

$$\frac{d^n}{dx^n} \sec x = S_n(\tan x) \sec x.$$

Montrer que $S_{n+1}(u) = (u^2+1)S_n'(u) + uS_n(u)$.

Exercice: Montrer que

$$\frac{1}{\cos x - u \sin x} = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(u) \frac{x^n}{n!}$$

Suggestion: Utiliser la formule de Taylor

$$\sec(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\tan(y)) \sec(y) \frac{x^n}{n!}.$$

et l'identité

$$\sec(x+y) = \frac{1}{\cos y \cos x - \sin y \, \sin x}$$

§ 6 Les polynômes d'Euler

Si p est un entier ≥ 0, on définit la somme alternée des puissances p-ième des entiers successifs en posant

$$A_p(n) = n^p - (n-1)^p + (n-2)^2 - (n-3)^2 + \cdots + (-1)^n 0^p$$

pour tout entier $n \geq 0$. Il est naturel de chercher polynôme donnat les valeurs de cette somme. Par exemple, on vérifie facilement que l'on a

$$A_2(n) = \frac{n^2+n}{2}$$

pour tout entier $n \geq 0$. De facon générale, si $a_0, a_1, a_2, \ldots$ est une suite de nombres, considérons la suite des sommes alternés

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= a_0 \\
\sigma_1 &= a_1 - a_0 \\
\sigma_2 &= a_2 - a_1 + a_0 \\
\sigma_3 &= a_3 - a_2 + a_1 - a_0 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

On trouve que $a_n = \sigma_n + \sigma_{n-1}$ pour tout $n > 0$. Inversement, si on a $a_n = b_n + b_{n-1}$ pour une suite de nombres $b_0, b_1, b_2, \ldots$ et si $b_0 = a_0$, alors on a $\sigma_n = b_n$ pour tout $n \geq 0$. Pour résoudre notre problème, il suffirait donc de trouver un polynôme $H_p(x)$ satisfaisant aux deux conditions (i) $x^p = H_p(x) + H_p(x-1)$ et (ii)$H_p(0) = 0$. Remarquer que la première condition entraîne que $H_p(x)$ est de degré p. Un tel polynôme n'existe pas si $p = 1$! (bien qu'il existe si $p = 2$). En effet, si $H_1(x) = ax + b$, alors la condition $x = H_1(x) + H_1(x-1)$

implique que $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{4}$. La deuxième condition $H_1(0) = 0$ est alors impossible à satisfaire. En fait, on trouve que

$$\begin{aligned}
A_1(1) &= 1 \\
A_1(2) &= 2 - 1 = 1 \\
A_1(3) &= 3 - 2 + 1 = 2 \\
A_1(4) &= 4 - 3 + 2 - 1 = 2 \\
A_1(5) &= 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 3 \\
A_1(6) &= 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1 = 3 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

On voit que

$$A_1(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} .$$

On peut réunir cette description dans une seule formule:

$$A_1(n) = \frac{n}{2} + \frac{1 - (-1)^n}{4}.$$

Il parait raisonnable de chercher un polynôme $H_p(x)$ et une constante C_p telles que l'on ait

$$A_p(n) = H_p(n) + (-1)^n C_p$$

pour tout entier $n \geq 0$. Dans ce cas, la condition $H_p(x) + H_p(x-1) = x^p$ est toujours satisfaite car

$$\begin{aligned}
H_p(n) + H_p(n-1) &= H_p(n) + (-1)^n C_p + H_p(n-1) + (-1)^{n-1} C_p \\
&= A_p(n) + A_p(n-1) = n^p
\end{aligned}$$

Remarquer que $A_p(0) = 0$ si $p > 0$; dans ce cas, $C_p = -H_p(0)$. De plus, $A_0(0) = 1$ et $A_0(1) = 0$; par suite, $H_0 = C_0 = \frac{1}{2}$. Nous allons supposer *à priori* que les polynômes $H_p(t)$ pour $p \geq 0$ admettent une série génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_p(t) \frac{x^p}{p!}$$

de la forme $H(x)e^{xt}$ pour une série

$$H(x) = \sum_{n \geq 0} H_n \frac{x^n}{n!}.$$

Cette hypothèse est motivée par l'exemple des polynôme de Bernoulli. Elle permet de racourcir le raisonnement si elle s'avère juste. Il n'y a pas de raison de l'écarter tant qu'elle n'engendre pas de contradiction. Elle implique que l'on a $H_p = H_p(0)$ et que

$$H_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} H_k x^{n-k}.$$

En terme de séries génératrices, la condition $H_p(t) + H_p(t-1) = t^p$ devient

$$H(x)e^{xt} + H(x)e^{x(t-1)} = e^{xt}.$$

Mais on a $H(x)e^{xt} + H(x)e^{x(t-1)} = e^{xt}H(x)(1 + e^{-x})$. Par suite, $H(x)(1 + e^{-x}) = 1$. Nous avons montré que

$$H(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Euler a défini les *polynômes d'Euler* $E_n(t)$ en posant

$$\frac{2e^{xt}}{e^x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(t)\frac{x^n}{n!}.$$

On a $2H_n(t) = E_n(t+1)$. La différence entre les polynômes $H_n(t)$ et les polynomes d'Euler est mineure. Les polynomes d'Euler sont unitaires. Par la suite nous allons travailler exclusivement avec les polynômes d'Euler car ils sont standards. L'introduction des polynômes $H_n(t)$ avait uniquement pour but de réfléchir sur le cheminement que pourrait avoir suivit Euler dans sa découverte. Les coefficients des polynômes d'Euler ne dépendent que de la série génératrice

$$\frac{2}{e^x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(0)\frac{x^n}{n!}.$$

En effet, on a

$$E_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} E_i(0)\, t^{n-i}.$$

Remarquer que

$$\frac{2}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x-1}{e^x+1} = 1 - \tanh\Big(\frac{x}{2}\Big).$$

Cela montre que $E_{2n}(0) = 0$ si $n > 0$ puisque la tangente hyperbolique est une fonction impaire. On trouve que

$$\begin{aligned}
E_0(x) &= 1\\
E_1(x) &= x - \frac{1}{2}\\
E_2(x) &= x^2 - x\\
E_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}\\
E_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x\\
E_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}\\
E_6(x) &= x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x\\
E_7(x) &= x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{35}{4}x^4 - \frac{21}{2}x^2 + \frac{17}{8}\\
E_8(x) &= x^8 - 4x^7 + 14x^5 - 28x^3 + 17x\\
E_9(x) &= x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 21x^6 - 63x^4 + \frac{153}{2}x^2 - \frac{31}{2}\\
E_{10}(x) &= x^{10} - 5x^9 + 30x^7 - 126x^5 + 255x^3 - 155x
\end{aligned}$$

Nous verrons que les coefficients de $E_n(x)$ sont des entiers divisés par une puissance de 2. Nous verrons que ces coefficients sont entiers si n est pair.

Proposition. *On a*

$$E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n \quad \text{et} \quad E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x)$$

Preuve: La première identité est conséquence de l'identité

$$\frac{2e^{x(t+1)}}{e^x+1} + \frac{2e^{xt}}{e^x+1} = \frac{2e^{xt}(e^x+1)}{e^x+1} = 2e^{xt}.$$

La seconde est conséquence de l'identité

$$\frac{2e^{-xt}}{e^{-x}+1} = \frac{2e^{x(1-t)}}{e^x+1}.$$

CQFD

Proposition. *Pour tout entier $p > 0$ et tout entier $n \geq 1$ on a*

$$n^p - (n-1)^p - \cdots + (-1)^n 0^p = \frac{E_p(n+1) + (-1)^n E_p(0)}{2}$$

Preuve: Partant de l'identité $E_p(x+1) + E_p(x) = 2x^p$, on obtient que

$$\begin{aligned}
&2\Big[n^p - (n-1)^p + \cdots + (-1)^n 0^p\Big] \\
&= \Big[E_p(n+1) + E_p(n)\Big] - \Big[E_p(n) + E_p(n-1)\Big] + \cdots + (-1)^n \Big[E_p(1) + E_p(0)\Big] \\
&= E_p(n+1) + (-1)^n E_p(0).
\end{aligned}$$

CQFD

Proposition. *On a*

$$E_{n-1}(x) = \frac{2}{n}\left\{B_n(x) - 2^n B_n\left(\frac{x}{2}\right)\right\} \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Preuve: En effet, si on substitue $a = e^x$ dans l'identité

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{a-1} - \frac{2}{a^2-1}$$

on obtient que

$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{e^x-1} - \frac{2}{e^{2x}-1},$$

et par suite que

$$x\frac{2e^{xt}}{e^x+1} = 2\frac{xe^{xt}}{e^x-1} - 2\frac{2xe^{xt}}{e^{2x}-1}.$$

Autrement dit,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nE_{n-1}(t)\frac{x^n}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)\frac{x^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\frac{t}{2}\right)\frac{(2x)^n}{n!}.$$

CQFD

Les *nombres d'Euler E_n* sont définis comme étant les coefficients de Taylor de la sécante hyperbolique

$$\operatorname{sech}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!}.$$

On a $E_{2n+1} = 0$ puisque la sécante hyperbolique est une fonction paire. Le nombre $(-1)^n E_{2n}$ est égal au nombre sẃcant A_{2n}. C'est donc un entier > 0.

Proposition. *On a*

$$E_n = 2^n E_n\Big(\frac{1}{2}\Big) \quad \text{et} \quad E_n(t) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} E_k \binom{n}{k} (2t-1)^{n-k}.$$

Preuve: En effet, on a

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{2e^x}{e^{2x}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\Big(\frac{1}{2}\Big)\frac{(2x)^n}{n!}.$$

De plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(t)\frac{x^n}{n!} = \frac{2e^{2xt}}{e^{2x}+1} = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}\, e^{(2t-1)x}.$$

On peut définir des *polynômes de Genocchi* $G_n(t)$ en posant

$$G(x)e^{xt} = \frac{2xe^{xt}}{e^x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t)\frac{x^n}{n!}.$$

Par définition, on a $G_n = G_n(0)$ et

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} G_k x^{n-k}.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
G_1(x) &= 1\\
G_2(x) &= 2x-1\\
G_3(x) &= 3x^2-3x\\
G_4(x) &= 4x^3-6x^2+1\\
G_5(x) &= 5x^4-10x^3+5x\\
G_6(x) &= 6x^5-15x^4+15x^2-3\\
G_7(x) &= 7x^6-21x^5+35x^3-21x\\
G_8(x) &= 8x^7-28x^6+70x^4-84x^2+17\\
G_9(x) &= 9x^8-36x^7+126x^5-252x^3+153x
\end{aligned}$$

Les coefficients de $G_n(x)$ sont entiers puisque les nombres de Genocchi sont entiers. Remarquer que $G_n(x)$ est un polynome de degré $n-1$.

Proposition. *On a*

$$G_n(x) = nE_{n-1}(x)$$

Preuve: En effet,

$$G(x)e^{xt} = x\frac{2e^{xt}}{e^x+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} nE_{n-1}(x)\frac{x^n}{n!}.$$

Par suite, $G_n(x) = nE_{n-1}(x)$. CQFD

Corollaire. *$E_{2n-1}(0)$ est un nombre impair divisé par la plus grande puissance de 2 divisant $2n$.*

Preuve: Montrons d'abord que l'on a

$$E_{2n-1}(0) = \frac{G_{2n}}{2n} = (-1)^n\frac{A_{2n-1}}{2^{2n-1}}.$$

En effet, on a $G_{2n} = G_{2n}(0) = 2nE_{2n-1}(0)$. D'autre part, d'après la proposition ?, on a $(-1)^n 2^{2n-1} G_{2n} = 2nA_{2n-1}$. L'égalité

$$E_{2n-1}(0) = (-1)^n \frac{A_{2n-1}}{2^{2n-1}}$$

montre que $E_{2n-1}(0)$ est un entier divisé par une puissance de 2. Le produit $2nE_{2n-1}(0)$ est un entier impair car G_{2n} est impair par la proposition?. Cela prouve que $E_{2n-1}(0)$ est un nombre impair divisé par la plus grande puissance de 2 divisant $2n$. CQFD

Corollaire. *Si 2^k est la plus grande puissance de 2 divisant $n+1$, alors les coefficients du polynôme $2^k E_n(x)$ sont entiers.*

Preuve: Les coefficients du polynôme $(n+1)E_n(x) = G_{n+1}(x)$ sont entiers. Le résultat cherché est alors conséquence du fait que ces coefficients sont des entiers divisés par une puissance de 2. CQFD

Corollaire. *Les coefficients des polynômes $E_{2n}(x)$ sont entiers.*

Exercices

Exercice: Démontrer les identités:

$$E_n(s+t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} E_i(s)\, t^{n-i} \quad \text{et} \quad G_n(s+t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} G_i(s)\, t^{n-i}$$

Exercice: Montrer que

$$G_n(x) = 2^n \left[B_n\Big(\frac{x+1}{2}\Big) - B_n\Big(\frac{x}{2}\Big) \right]$$

Rappellons que le nombre de Genocchi *réduit* $\tilde{G}_{2n}$ est le quotient de G_{2n} par le plus grand facteur impair de n. Désignons par $e_2(n)$ l'exposant de la plus grande puissance de 2 divisant un entier n. L'exercice suivant porte su un raffinement du corollaire?

Exercice: Montrer que

$$E_{2n-1}(0) = \frac{\tilde{G}_{2n}}{2^{e_2(2n)}}.$$

Exercice: Montrer que la suite de polynômes $E_0(x), E_1(x), E_2(x), \cdots$ est la seule satisfaisant aux conditions suivantes:

(i) $E_0(x) = 1$,
(ii) $E_n'(x) = nE_{n-1}(x)$ pour tout $n > 0$,
(iii) $E_{2n-1}\big(\frac{1}{2}\big) = E_{2n}(0) = 0$ pour tout $n > 0$.

Toute fonction différentiable $f(x)$ définie sur l'intervalle $[0, 1]$ peut se développer en série de Fourier de cosinus

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\pi k x)$$

avec

$$a_k = 2 \int_0^1 f(x) \cos(\pi k x) dx.$$

Si f satisfait la condition $f(1 - x) = f(x)$ alors $a_k = 0$ pour k impair, et si f satisfait la condition $f(1 - x) = -f(x)$ alors $a_k = 0$ pour k pair. Par exemple, on trouve que

$$x - \frac{1}{2} = \frac{-4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k + 1)\pi x)}{(2k + 1)^2} \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Exercice: Établir les développements de Fourier suivants pour $0 \leq x \leq 1$:

$$(-1)^n E_{2n-1}(x) \frac{\pi^{2n-1}}{(2n - 1)!} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k + 1)\pi x)}{(2k + 1)^{2n}},$$

$$(-1)^n E_{2n}(x) \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k + 1)\pi x)}{(2k + 1)^{2n+1}}.$$

La *fonction* $\lambda(s)$ *de Dirichlet* est définie par la série

$$\lambda(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots.$$

On a $\lambda(s) = \big(1 - \frac{1}{2^s}\big)\zeta(s)$.

Exercice: Montrer que

$$(-1)^n E_{2n-1}(0) \frac{\pi^{2n-1}}{(2n - 1)!} = \frac{4}{\pi} \lambda(2n).$$

Exercice: Montrer que

$$\frac{E_{2n-1}(x)}{E_{2n-1}(0)} = \frac{1}{\lambda(2n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k + 1)\pi x)}{(2k + 1)^{2n}}.$$

Exercice: Montrer que

$$\mid E_{2n-1}(x) \mid \leq \mid E_{2n-1}(0) \mid \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1$$

Exercice: Montrer que

$$\frac{E_{2n-1}(x)}{E_{2n-1}(0)} \to \cos(\pi x) \qquad \text{et} \qquad \frac{E_{2n-1}(x)}{E'_{2n-1}(0)} \to \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$$

uniformément sur tout intervalle borné lorsque $n \to \infty$.

Exercice: Montrer que la suite de polynômes $G_1(x), G_2(x), G_3(x), \cdots$ est la seule satisfaisant aux conditions suivantes:
(i) $G_1(x) = 1$,
(ii) $G'_n(x) = nG_{n-1}(x)$ pour tout $n > 0$,
(iii) $G_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = G_{2n+1}(0) = 0$ pour tout $n > 0$.

Exercice: Montrer que pour $0 \leq x \leq 1$, on a

$$(-1)^n \frac{G_{2n}(x)}{4} \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^{2n}},$$

$$(-1)^n \frac{G_{2n+1}(x)}{4} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^{2n+1}}.$$

§ 7 Nombres eulériens

Nous dirons que la série

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

est la *série génératrice ordinaire* de la suite de nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Par exemple, la série géométrique:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

est la série génératrice ordinaire de la suite $1, 1, 1, \cdots$ et la série

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

est la série génératrice ordinaire de la suite $1, 2, 3, \cdots$ Dans cette section, nous ne parlerons que de séries génératrices ordinaires et nous dirons que ce sont des séries génératrices tout court. Aux opérations sur les séries correspondent des opérations sur les coefficients. Par exemple, si

$$\Big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\Big)\Big(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\Big) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

alors

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n.$$

En particulier, on trouve que

$$(1-x)\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\big) = a_0 + \Delta a_0 x + \Delta a_1 x^2 + \Delta a_2 x^3 + \cdots$$

avec $\Delta a_1 = a_{i+1} - a_i$. De même,

$$\frac{1}{(1-x)}\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\big) = \Sigma a_0 + \Sigma a_1 x + \Sigma a_2 x^2 + \Sigma a_2 x^3 + \cdots$$

avec $\Sigma a_n = a_0 + \cdots + a_n$. Ces exemples montrent que l'on peut utiliser les séries génératrices pour sommer des suites de nombres. Par exemple, on a

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)}\frac{1}{(1-x)} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

et

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)}\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots.$$

Plus généralement, d'après la formule binôme, on a

$$\frac{1}{(1-x)^a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{[n]}}{n!} x^n.$$

L'égalité

$$\frac{1}{(1-x)^{a+1}} = \frac{1}{(1-x)}\frac{1}{(1-x)^a}$$

montre alors que l'on a

$$\Sigma_{k=0}^{n} \frac{a^{[k]}}{k!} = \frac{(a+1)^{[n]}}{n!}$$

L'opération de dérivation

$$D\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\big) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \cdots$$

a pour effet de remplacer a_n par $(n+1)a_{n+1}$. Plus généralement,

$$D^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)\cdots(n+1) a_{n+k}\, x^n.$$

Il est facile de voir par récurrence sur k que l'on a

$$D^k\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

On obtient par suite que

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)\cdots(n+1)}{k}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$$

L'opération xD a pour effet de multiplier le coefficient a_n par n:

$$xD\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\big) = a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots.$$

Par suite,

$$(xD)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n x^n.$$

En particulier, la série génératrice des puissances $0^k, 1^k, 2^k, 3^k, \ldots$ s'obtient en appliquant l'opérateur $(xD)^k$ à la série géométrique:

$$(xD)^k\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = 0^k x^0 + 1^k x + 2^k x^2 + 3^k x^3 + \cdots.$$

On trouve,

$$\begin{aligned}
(xD)\Big(\frac{1}{1-x}\Big) &= \frac{x}{(1-x)^2},\\
(xD)^2\Big(\frac{1}{1-x}\Big) &= \frac{x^2+x}{(1-x)^3},\\
(xD)^3\Big(\frac{1}{1-x}\Big) &= \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4},\\
(xD)^4\Big(\frac{1}{1-x}\Big) &= \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5},
\end{aligned}$$

On voit par récurrence qu'il existe un polynôme $A_k(x)$ pour lequel on a

$$(xD)^k\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{A_k(x)}{(1-x)^{k+1}}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
(xD)\frac{A_k(x)}{(1-x)^{k+1}} &= x\Big[\frac{A_k'(x)}{(1-x)^{k+1}} + \frac{(k+1)A_k(x)}{(1-x)^{k+2}}\Big].\\
&= \frac{x[(1-x)A_k'(x)+(k+1)A_k(x)]}{(1-x)^{k+2}}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$A_{k+1}(x) = (1-x)xA_k'(x) + (k+1)xA_k(x). \qquad ?$$

On dit que les polynômes $A_k(x)$ sont *Eulériens*. On a

$$A_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \Big\langle {k \atop i} \Big\rangle x^{k-i}$$

pour certains coefficients $\Big\langle {k \atop i} \Big\rangle$. On dit que ces coefficients sont les *nombres Eulériens*. On trouve

$$\begin{aligned}
&A_0(x) = 1,\\
&A_1(x) = x,\\
&A_2(x) = x^2+x,\\
&A_3(x) = x^3+4x^2+x,\\
&A_4(x) = x^4+11x^3+11x^2+x,\\
&A_5(x) = x^5+26x^4+66x^3+26x^2+x,\\
&A_6(x) = x^6+57x^5+302x^4+302x^3+57x^2+x,\\
&A_7(x) = x^7+120x^6+1191x^5+2416x^4+1191x^3+120x^2+x,
\end{aligned}$$

Remarquer la symétrie des coefficients. Remarquer aussi que

$$k! = \sum_{i=0}^{k} \Big\langle {k \atop i} \Big\rangle.$$

La relation de récurrence pour les polynômes $A_k(x)$ se traduit par la récurrence suivante pour les coefficients:

$$\Big\langle {k+1 \atop i} \Big\rangle = (i+1)\Big\langle {k \atop i} \Big\rangle + (k+1-i)\Big\langle {k \atop i-1} \Big\rangle.$$

Jointes aux conditions $\left\langle {k \atop 0} \right\rangle = 1$ et $\left\langle {k \atop k} \right\rangle = 0$ pour $k > 0$, elle détermine les nombres Eulériens. Elle permet de démontrer la relation de symétrie

$$\left\langle {k \atop i} \right\rangle = \left\langle {k \atop k-1-i} \right\rangle \qquad \text{pour} \quad k > 0.$$

Cette symétrie est en vérité conséquence de la relation

$$\frac{1}{1-x^{-1}} = 1 - \frac{1}{1-x}.$$

Pour le voir, posons $Sf(x) = f(x^{-1})$ pour toute fonction $f(x)$. On a

$$(xD)Sf(x) = xDf(x^{-1}) = -x^{-1}f'(x^{-1}).$$

On reconnait une loi de commutation $(xD)S = -S(xD)$. On a par suite $(xD)^k S = (-1)^k S(xD)^k$ pour tout $k \geq 0$. En particulier, on a

$$(xD)^k \Big(\frac{1}{1-x^{-1}} \Big) = (-1)^k \frac{A_k(x^{-1})}{(1-x^{-1})^{k+1}}.$$

Mais la relation

$$\frac{1}{1-x^{-1}} = 1 - \frac{1}{1-x},$$

implique que l'on a

$$(xD)^k \Big(\frac{1}{1-x^{-1}} \Big) = (xD)^k \Big(\frac{-1}{1-x} \Big) \quad \text{pour} \quad k > 0.$$

En combinant ces égalités, on obtient que

$$(-1)^k \frac{A_k(x^{-1})}{(1-x^{-1})^{k+1}} = \frac{-A_k(x)}{(1-x)^{k+1}}.$$

Après simplification on obtient la symétrie $x^{k+1}A_k(x^{-1}) = A_k(x)$. Pour démontrer la relation $A_k(1) = k!$, nous allons utiliser le développement

$$(xD)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}'' x^i D^i \qquad ?.$$

dans laquelle figurent les nombres de Stirling de deuxième espèce $\binom{k}{i}''$. Nous avons utiliseé ce développement dans la partie 5. On le démontre facilement par récurrence sur k. Si on l'applique à la fonction $\frac{1}{1-x}$. on obtient que

$$\frac{A_k(x)}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}'' \frac{i!x^i}{(1-x)^{i+1}}.$$

Par suite,

$$A_k(x) = \sum_{i=0}^{k} i! \binom{k}{i}'' x^i (1-x)^{k-i}.$$

Si on pose $x = 1$ dans cette identité, on obtient que $A_k(1) = k!$.

L'identité suivante est due à Worpitzky (1883):

Proposition. *On a l'identité*

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} \left\langle {n \atop i} \right\rangle \binom{x+i}{n}.$$

Preuve: En effet, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n = \frac{A_k(x)}{(1-x)^{k+1}} = \left(\sum_{i=0}^{k} \left\langle {k \atop i} \right\rangle x^{k-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k}{k} x^j\right).$$

Le coefficient de x^n dans ce dernier produit est donné par

$$\sum_{k-i+j=n} \left\langle {k \atop i} \right\rangle \binom{k+j}{k} = \sum_{i} \left\langle {k \atop i} \right\rangle \binom{n+i}{k}.$$

Cela montre que

$$n^k = \sum_{i=0}^{k} \left\langle {k \atop i} \right\rangle \binom{n+i}{k}.$$

Comme les deux membres de cette égalité sont des polynômes dans la variable n, on obtient que

$$x^k = \sum_{i=0}^{k} \left\langle {k \atop i} \right\rangle \binom{x+i}{k}.$$

CQFD

En particulier, on a

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x+1)}{2} \\ x^3 &= \frac{x(x-1)(x-2)}{6} + 4\frac{(x+1)x(x-1)}{6} + \frac{x(x+2)(x+1)}{6}. \end{aligned}$$

La premère identité implique que l'on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} = \binom{n}{3} + \binom{n+1}{3}.$$

De même, la seconde identité implique que l'on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \binom{n}{4} + 4\binom{n+1}{4} + \binom{n+2}{4}.$$

Plus généralement,

Corollaire. *Si $n > 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \sum_{i=0}^{p} \left\langle {p \atop i} \right\rangle \binom{n+i}{p+1}.$$

Preuve: En effet, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{p} \left\langle {p \atop i} \right\rangle \binom{k+i}{p} = \sum_{i=0}^{p} \left\langle {p \atop i} \right\rangle \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+i}{p}.$$

Mais si $i \le p$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+i}{p} = \binom{n+i}{p+1}.$$

CQFD

Proposition. *Pour tout entier $p \geq 0$, on a*

$$B_p(x) = \sum_{i=0}^{p} \left\langle {p \atop i} \right\rangle \frac{d}{dx} \binom{x+i}{p+1}.$$

Preuve: Il suit de la proposition ? et de la proposition ? que l'on a

$$\int_0^x B_p(t)dt = \sum_{i=0}^{p} \left\langle {p \atop i} \right\rangle \binom{x+i}{p+1}.$$

Le résultat s'obtient en dérivant ensuite par rapport à x. CQFD

On obtient une nouvelle expression des nombres de Bernoulli:

Corollaire. *On a*

$$B_p = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i} \left\langle {p \atop i} \right\rangle i!(p-i)!$$

Preuve: En effet,

$$\frac{d}{dx}(x+i)(x+i-1)\cdots(x-p+i) \mid_{x=0} = (-1)^{p-i} i!(p-i)!.$$

Exercices

Exercice: Montrer que

$$\frac{A_k(e^x)}{(1-e^x)^{k+1}} = D^k\Big(\frac{1}{1-e^x}\Big).$$

Suggestion: Pour toute fonction $f(x)$, poser $Ef(x) = f(e^x)$. Démontrer la loi de de commutation $E(xD) = DE$. En déduire que l'on a $E(xD)^k = D^k E$ pour tout $k \geq 0$.

Exercice: Montrer que l'on a

$$\frac{1}{1-ue^t} = \sum \frac{A_k(u)}{(1-u)^{k+1}} \frac{t^k}{k!}.$$

Suggestion: Utiliser l'exercice précédent et la formule de Taylor

$$\frac{1}{1-e^{x+t}} = \sum D^k\Big(\frac{1}{1-e^x}\Big)\frac{t^k}{k!}.$$

Remplacer e^x par u.

Exercice: Montrer que l'on a

$$\sum A_k(u)\frac{t^k}{k!} = \left(1 - ut - u(1-u)\frac{t^2}{2!} - u(1-u)^2\frac{t^3}{3!} - \cdots\right)^{-1}.$$

Suggestion: Remplacer t par $(1-u)t$ dans l'identité de l'exercice précédent.